Балашовский институт (филиал)
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского»

Дифференциальные уравнения:
практические занятия

*Учебно-методическое пособие
для студентов, обучающихся по направлениям
«Педагогическое образование», «Биотехнические системы
и технологии», «Прикладная информатика»,
«Прикладная математика и информатика»*

Балашов
2014

УДК 517.9
ББК 22.16я73
Д50

Авторы-составители:
В. В. Кертанова, О. Я. Рыжкова.

Рецензенты:

Кандидат технических наук, доцент Балашовского филиала ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный аграрный университет имени Н. И. Вавилова»
Т. А. Хвалько;
Кандидат физико-математических наук, доцент Балашовского института (филиала) ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
С. А. Ляшко.

Рекомендовано к изданию Научно-методическим советом Балашовского института (филиала) ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского».

Д50 **Дифференциальные уравнения: практические занятия :** учеб.-метод. пособие для студентов обучающихся по направлениям «Педагогическое образование», «Биотехнические системы и технологии», «Прикладная информатика», «Прикладная математика и информатика» / авт.-сост. В. В. Кертанова, О. Я. Рыжкова. — Балашов : Николаев, 2014.— 104 с.
ISBN 978-5-94035-528-1

В учебно-методическом пособии изложены методы решения типовых задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений и их приложений, приведены основные понятия, идеи, теоретические факты и их практическое применение, подобраны задачи для самостоятельного решения студентами.

Пособие предназначено для студентов факультета математики, экономики и информатики, обучающихся по направлению «Педагогическое образование», профиль «Математика», «Математика и информатика»; направлениям «Биотехнические системы и технологии», «Прикладная информатика в экономике», «Прикладная математика и информатика».

УДК 517.9
ББК 22.16я73

ISBN 978-5-94035-528-1

О г л а в л е н и е

Введение

Являясь дисциплиной естественно-научного цикла, курс «Дифференциальные уравнения» не только способствует появлению нового знания о природе, обществе и человеке, но и находит в других науках реальные стимулы для своего развития. Казалось бы, дифференциальные уравнения могут использоваться только для решения задач математических дисциплин, однако это не так. Применение дифференциальных уравнений достаточно широко. Их используют для решения не только математических, но и биологических, химических, физических задач. Многие процессы, происходящие в природе и изучаемые в таких науках, как биология и химия невозможно объяснить и разрешить, не зная, что такое дифференциальные уравнения и методов их решения.

Программа курса «Дифференциальные уравнения» разработана на основе Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования и отвечает государственным требованиям к минимуму содержания и уровню подготовки бакалавров по направлению подготовки «Педагогическое образование», профиль «Математика и информатика», профиль «Математика»; по направлению подготовки «Прикладная информатика», профиль «Прикладная информатика в экономике»; по направлению подготовки «Биотехнические системы и технологии», профиль «Биомедицинская инженерия».

Материал учебно-методического пособия «Дифференциальные уравнения: практические занятия» разбит на занятия, в каждом из которых даются необходимые теоретические сведения, используемые при решении задач, приводятся типовые задачи с решениями. Кроме того, настоящее пособие содержит достаточное количество задач для самостоятельной работы студентов и для решения на практических занятиях, контрольные работы и тесты. Основное внимание в уделяется приобретению практических навыков, поэтому большая часть теоретического материала представлена в курсе без доказательств, но снабжена достаточным количеством примеров.

Основной целью является попытка помочь студентам в формировании их математического мышления, выработке практических навыков решения дифференциальных уравнений.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Занятие 1. Основные определения и понятия

При рассмотрении многих прикладных задач не всегда удается установить непосредственную зависимость между величинами, описывающими реальное явление или процесс. При этом часто удается установить связь между величинами (функциями) и скоростями их изменения относительно других переменных величин. Эти уравнения, содержащие производные (или дифференциалы) неизвестных функций, называются *дифференциальными уравнениями*. Дифференциальное уравнение, описывающее реальный эволюционный процесс, называется *дифференциальной моделью* этого процесса.

Задача. Через сосуд емкостью V л, наполненный водным раствором некоторого вещества, протекает непрерывно жидкость. При этом за единицу времени втекает V_0 л чистой воды и вытекает такое же количество раствора. Найти закон изменения вещества в сосуде в зависимости от времени протекания жидкости через сосуд.

Решение. Пусть в момент времени t в сосуде содержится x кг вещества. Требуется найти закон $x = x(t)$ изменения вещества в сосуде в зависимости от времени t.

Скорость изменения количества вещества $\frac{dx}{dt}$ отрицательна, так как $x(t)$ — убывающая функция. С другой стороны, скорость уменьшения количества вещества в сосуде будет равна $\frac{V_0}{V}x$ кг. Отсюда получим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{V_0}{V}x. \qquad (1)$$

В дальнейшем покажем, что решением этого уравнения является функция

$$x = Ce^{-\frac{V_0}{V}t}, \qquad (2)$$

где C — произвольная постоянная.

Для определенности предположим, что в некоторый начальный момент времени $t = 0$ количество вещества в сосуде было x_0 кг. Полагая в равенстве (2) $t = 0$, $x = x_0$, найдем x_0.

В итоге

$$x = x_0 e^{-\frac{V_0}{V}t} \qquad (3)$$

— закон изменения количества вещества в сосуде с течением времени.

Решая эту задачу, получили уравнение (1), в котором неизвестная функция одной независимой переменной содержалась под знаком производной. Уравнение (1) называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Определение. Обыкновенным дифференциальным уравнением называется соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (4)$$

между независимой переменной x, функцией $y = f(x)$ и производными этой функции $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Определение. Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящих в него производных.

Уравнение $\frac{dx}{dt} = -\frac{V_0}{V}x$ — дифференциальное уравнение первого порядка.

В обыкновенных дифференциальных уравнениях неизвестная функция зависит только от одного аргумента. В дифференциальных уравнениях с частными производными неизвестная функция зависит от нескольких независимых переменных.

Определение. Решением дифференциального уравнения называется функция, имеющая непрерывные производные до порядка, равного порядку уравнения, и обращающая это уравнение в тождество.

Обычно дифференциальные уравнения имеют бесконечное множество решений (см., например, решение вышеприведенной задачи). Важной задачей теории дифференциальных уравнений является отыскание всех решений данного дифференциального уравнения и изучение свойств этих решений. Задачу решения дифференциального уравнения часто называют *задачей интегрирования* дифференциального уравнения. Кривая, соответствующая решению обыкновенного дифференциального уравнения, называется *интегральной кривой* этого уравнения.

В теории дифференциальных уравнений и для ее приложений важное значение имеет задача отыскания частного решения дифференциального уравнения (4), удовлетворяющего начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (5)$$

Такая задача называется *задачей Коши*.

Геометрически речь идет о нахождении интегральной кривой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Примеры.

1. $x^2 y' - 3y - x + 5 = 0$ — обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

2. $x\dfrac{d^2 y}{dx^2} + xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 = y$ — обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$.

3. $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ — дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Для широкого класса уравнений задача Коши на некотором промежутке, содержащем x_0, имеет единственное решение. Это решение называется *частным решением* уравнения (4). Множество всех частных решений дифференциального уравнения образует *общее решение* этого уравнения.

В ранее рассмотренной задаче

$x = Ce^{-\frac{V_0}{V}t}$ — общее решение уравнения (1),

$x = x_0 e^{-\frac{V_0}{V}t}$ — частное решение этого уравнения.

<u>Определение.</u> Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение вида

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

где x — независимая переменная, $y = y(x)$ — неизвестная функция от x.

Если уравнение (1) можно разрешить относительно производной y', то его записывают в виде:

$$y' = f(x, y) \text{ или } \frac{dy}{dx} = f(x, y). \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной. Для такого уравнения справедлива теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.

Теорема Коши. Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{df}{dy}$ непрерывны в некоторой области D на плоскости

Oxy, содержащей некоторую точку (x_0, y_0), то существует единственное решение этого уравнения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию $\varphi(x_0) = y_0$.

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что существует и притом единственная функция $y = \varphi(x)$, график которой проходит через точку (x_0, y_0).

Общим интегралом дифференциального уравнения (1) в области *D* называется функция $\Phi(x, y, C) = 0$, зависящая от одной произвольной постоянной *C*. Функция $\Phi(x, y, C)$ обладает следующим свойством: для любой точки (x_0, y_0), лежащей внутри области *D*, уравнение

$$\Phi(x_0, y_0, C) = 0$$

однозначно разрешимо относительно *C*, причем, если C_0 — соответствующее решение, то $\Phi(x, y, C_0) = 0$ есть частное решение уравнения (1).

Геометрически общее решение $y = y(x, C)$ дифференциального уравнения представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости *Oxy*. Угловой коэффициент касательной в каждой точке интегральной кривой равен производной $y'(x)$, которая с учетом дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ равна $f(x, y)$. Поэтому, можно, не зная решения $y(x)$, изобразить множество касательных и по ним графически построить решение.

<u>Определение.</u> Особым решением дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, т. е. в окрестности некоторой точки этого решения (x, y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной *C*. Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной *C*. Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается, по крайней мере, одной интегральной кривой. Не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения.

Задания для самостоятельного решения

1. Убедиться, что функция $y = Cx^3$, где *C* — произвольная постоянная, является решением дифференциального уравнения $xy' - 3y = 0$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$.

2. Доказать, что при любом $C \in R$ функция $y = f(x)$, определяемая соотношением $y = arctg(x + y) + C$, является решением дифференциального уравнения $(x + y)^3 \dfrac{dy}{dx} = 1$.

3. Доказать, что функция, заданная параметрически уравнениями $y = \begin{cases} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$, является решением дифференциального уравнения $(1+xy)\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0$.

4. Построить интегральные кривые уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{|x-y|}$.

5. Составить дифференциальное уравнение семейства окружностей с общим центром (1; 0).

6. Составить дифференциальное уравнение семейства парабол, которые проходят через начало координат, и для которых ось абсцисс является осью симметрии.

Ответы

1. $y = 2x^3$.
2. Указание. Использовать правило дифференцирования неявной функции.
3.
4. При $y < x, \quad y = x + C$. При $y > x, \quad y = -x + C$.
5. $y\dfrac{dy}{dx} + x = 1.$
6. $2x\dfrac{dy}{dx} - y = 0$.

Тест к занятию 1

Часть А

1. Определить порядок дифференциального уравнения

$$y'' - 2x + 5y''' + y = 0:$$

1) 0; **2)** 1; **3)** 2; **4)** 3.

2. Среди указанных функций найдите решение уравнения

$$y' - 2y = 0:$$

1) $\sin x$; **2)** e^x; **3)** e^{2x}; **4)** x.

3. При каком значении k функция $y = kx^2$ является решением дифференциального уравнения $xy' - 2y = 0$ с начальным условием $y(1) = 3$:

1) 3; **2)** 0; **3)** –1; **4)** –3.

4. Известно общее решение $y = Cx^3$ дифференциального уравнения. Укажите его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(2) = 8$:

1) $2x^3$; **2)** $8x^3$; **3)** x^3; **4)** $-x^3$.

5. Найдите дифференциальное уравнение семейства линий $y = Cx$.

1) $y' = x$; **2)** $y = y'x$; **3)** $y' = y$; **4)** $y' = xy$.

Часть B

1. Какое уравнение называют обыкновенным дифференциальным уравнением?
2. Сколько решений может иметь дифференциальное уравнение?
3. Что называется интегральной кривой дифференциального уравнения?
4. Приведите пример задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка?
5. Что такое частное решение? Как оно связано с формулой общего решения?

Занятие 2. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)dx = f_2(y)dy \qquad (3)$$

называется дифференциальным уравнением с разделенными переменными.

Интегрируя, получим

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C \qquad (4),$$

где C — произвольная постоянная.

В некоторых случаях интегралы в (4) нельзя выразить через элементарные функции. Однако считается, что дифференциальное уравнение (3) проинтегрировано, если его решение сведено к виду (4).

Пример 1. Решить уравнение $(x+1)dx + (y-1)dy = 0$. Найти интегральную кривую, проходящую через точку $(0,0)$.

Решение. Общий интеграл этого уравнения

$$\int (x+1)dx + \int (y-1)dy = C,$$

$$\frac{x^2}{2} + x + \frac{y^2}{2} - y = C,$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + x - y = C.$$

Полагая в этом равенстве $x = 0,\ y = 0$, получим $C = 0$. Частное решение уравнения имеет вид $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ или $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$. Эта интегральная кривая — окружность с центром в точке $(-1, 1)$ и радиусом, равным $\sqrt{2}$.

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)q_1(y)dx = f_2(x)q_2(y)dy \qquad (5)$$

называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Предполагаем, что функции $f_1(x), f_2(x), q_1(y), q_2(y)$ непрерывны в некоторой области.

Если $q_1(y) \neq 0,\ f_2(x) \neq 0$, то, разделив обе части равенства (5) на произведение $f_2(x) \cdot q_1(y)$, получим

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = \frac{q_2(y)}{q_1(y)} dy \cdot$$

Получили дифференциальное уравнение с разделенными переменными.

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными можно также записать в виде

$$y' = \varphi(x)\psi(y).$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$x\left(1+y^2\right)dx - y\left(1+x^2\right)dy = 0.$$

Решение. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим данное уравнение на произведение $\left(1+y^2\right)\cdot\left(1+x^2\right)$, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{xdx}{1+x^2} - \frac{ydy}{1+y^2} = 0,$$

$$\frac{xdx}{1+x^2} = \frac{ydy}{1+y^2}.$$

Интегрируем, воспользовавшись произволом выбора постоянной интегрирования:

$$\ln\left(1+x^2\right) = \ln\left(1+y^2\right) + \ln C,$$

$$\ln\frac{1+x^2}{1+y^2} = \ln C,$$

$$\frac{1+x^2}{1+y^2} = C,$$

$1+x^2 = C\left(1+y^2\right)$ — общее решение уравнения.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$(2+x)ydx - x(1-y)dy = 0.$$

Решение. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные и получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{2+x}{x}dx-\frac{1-y}{y}dy=0,$$

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)dx+\left(1-\frac{1}{y}\right)dy=0\cdot$$

Интегрируя, получим

$$x+2\ln|x|+y-\ln|y|=C,$$

$\ln\dfrac{x^2}{|y|}+x+y=C$ — общий интеграл данного уравнения.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'=xy^2+3xy$.

Решение. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные и получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{dy}{dx}=xy(y+3),$$

$$\frac{dy}{y(y+3)}=xdx.$$

Интегрируя, получим

$$\int\frac{dy}{y(y+3)}=\int xdx.$$

Чтобы вычислить интеграл в левой части равенства, разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{y(y+3)}=\frac{a}{y}+\frac{b}{y+3}=\frac{a(y+3)+by}{y(y+3)}=\frac{ay+3a+by}{y(y+3)}=\frac{(a+b)y+3a}{y(y+3)}.$$

Получим систему:

$$\begin{cases}a+b=0\\ 3a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\ b=-\dfrac{1}{3}\end{cases}.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{1}{y(y+3)}=\frac{1/3}{y}-\frac{1/3}{y+3},$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{dy}{y}-\frac{1}{3}\int\frac{dy}{(y+3)}=\int xdx,$$

$$\frac{1}{3}\ln|y|-\frac{1}{3}\ln|y+3|-\frac{x^2}{2}=\ln C_1,$$

$$\ln|y|-\ln|y+3|-\frac{3x^2}{2}=3\ln C_1,$$

$$\ln\frac{|y|}{|y+3|}=\frac{3x^2}{2}+\ln C_1{}^3,$$

$\dfrac{|y|}{|y+3|}=C\cdot e^{\frac{3x^2}{2}}$, $C>0$ — общий интеграл данного уравнения.

Заметим, что $y=0$; $y=-3$ также являются решениями уравнения.

Пример 5. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy'+y=0$ при $x_0=1$, $y_0=2$.

Решение. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные и получим уравнение с разделенными переменными:

$$x\frac{dy}{dx}+y=0,$$

$$xdy=-ydx,$$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем:

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln y=-\ln x+\ln C,$$

$$\ln y+\ln x=\ln C,$$

$$\ln xy=\ln C,$$

$$xy=C,$$

$y=\dfrac{C}{x}$ — общее решение исходного дифференциального уравнения.

Подставим в полученное дифференциальное уравнение начальные условия: $x_0=1$, $y_0=2$. Имеем $2=\dfrac{C}{1}\Rightarrow\quad C=2$.

Таким образом, частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши): $y = \dfrac{2}{x}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Решить уравнения:

1. $\left(1 + y^2\right)dx - \left(1 + x^2\right)dy = 0.$
2. $y\left(1 + x^2\right)y' = 1 + y^2$.
3. $y \cdot y' = \dfrac{1 - 2x}{y}$.
4. $y' = y^2 \cos x$.
5. $\left(x + xy^2\right)dx + \left(y + yx^2\right)dy = 0$.
6. $y' = \dfrac{4}{x^2 - 4}$.
7. $\dfrac{dy}{\sqrt{y}} = -\sin x\,dx$.
8. $y' = \dfrac{y + 3}{x + 3}$.
9. $\left(1 + x^2\right)dy = 2xydx$.
10. $\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{dy}{x}$.
11. $y' + y = 0$.
12. $yy' = \dfrac{-2x}{\cos y}$.
13. $y' = y^{2/3}$.
14. $y' = x(y^2 + 1)$.
15. $2xe^{-x^2} + \dfrac{y'}{y} = 0$.
16. $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$.

2. Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

17. $e^x dx - \left(1 + e^x\right)ydy = 0, \quad y(0) = 1$.
18. $\left(1 + x^2\right)y^3 dx - \left(y^2 - 1\right)x^3 dy = 0, \quad y(1) = -1$.

19. $ydx + ctgx dy = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$.

20. $\sin y \cdot \cos x dy = \cos y \cdot \sin x dx, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$.

21. $\left(\sqrt{xy} + \sqrt{x}\right)y' - y = 0, \quad y(1) = 1$.

22. $y' = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0), \quad y(3) = -4$.

23. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad (x \neq 0), \quad y(2) = 3$.

24. $y' = 4x^3, \quad y(0) = 0$.

25. $y' tgx = y + 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

26. $\frac{ydx}{\ln x} = xdy, \quad y(e) = 1$.

27. $\frac{y}{y'} = \ln y, \quad y(2) = 1$.

28. $\frac{yy'}{x} + e^y = 0, \quad y(1) = 0$.

29. $y' \cos x = (y+1)\sin x, \qquad y(0) = 0$.

30. $20xdx - 3ydy = 3x^2 ydy - 5xy^2 dx, \quad y(1) = 1$.

Ответы

1.

1. $y(1 - Cx) = x + C$.
2. $1 + y^2 = Ce^{2arctgx}$.
3. $y^3 = 3x - 3x^2 + C$.
4. $y = \frac{1}{C - \sin x}$.
5. $\left(1 + x^2\right)\left(1 + y^2\right) = C$.
6. $y = \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$.
7. $y = \frac{(\cos x + C)^2}{4}$.
8. $y = (x+3)C - 3$.
9. $y = \left(x^2 + 1\right)C$.

10. $y=-\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C$.

11. $y=C\cdot e^{-x}$.

12. $y\sin y+\cos y+x^2+C=0$.

13. $y=\dfrac{1}{27}(x+C)^3$.

14. $y=tg\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)$.

15. $y=C\cdot e^{e^{-x^2}}$.

16. $(x^2-1)(y^2-1)=C$.

2.

17. $y^2=1+2\ln\dfrac{1+e^x}{2}$.

18. $x^{-2}+y^{-2}=2\left(1+\ln\left|\dfrac{x}{y}\right|\right)$.

19. $y=-2\cos x$.

20. $\cos x=\sqrt{2}\cos y$.

21. $2\sqrt{y}+\ln|y|-2\sqrt{x}=0$.

22. $x^2+y^2=25$.

23. $xy=6$.

24. $y=x^4$.

25. $y=2\sin x-1$.

26. $y=\ln x$.

27. $2(x-2)=\ln^2 y$.

28. $2e^{-y}(y+1)=x^2+1$.

29. $y=\dfrac{C}{\cos x}-1$.

30. $y=\sqrt{5\left(\dfrac{x^2+1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}-4}$.

Занятие 3. Однородные уравнения

Определение. Функция $f(x, y)$, удовлетворяющая условию $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ для любого значения параметра t (кроме нуля), называется однородной функцией степени n (или порядка n).

Пример 1. Является ли однородной функция $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y$?

Решение.

$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3 x^3 + 3t^3 x^2 y = t^3(x^3 + 3x^2 y) = t^3 f(x, y)$.

Таким образом, функция $f(x, y)$ является однородной 3-го порядка.

Пример 2. Является ли однородной функция $f(x, y) = x^2 - 5y$?

Решение. $f(tx, ty) = (tx)^2 - 5ty = t^3 x^3 - 5ty = t(t^2 x^3 - 5y)$.

Таким образом, функция $f(x, y) = x^2 - 5y$ не является однородной функцией.

Свойства однородных функций

1. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции степени n (или порядка n), то функция $f(x, y) = \dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ есть однородная функция нулевой степени.
2. Если функция $f(x, y)$ — однородная функция нулевой степени, то она зависит только от отношения переменных $\dfrac{x}{y}$.

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называется однородным дифференциальным уравнением, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются однородными функциями одной и той же степени n.

Учитывая свойства однородных функций, можно однородное дифференциальное уравнение определить иначе.

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется однородным, если его правая часть $f(x, y)$ есть однородная функция нулевой степени относительно своих аргументов.

Чтобы решить однородное дифференциальное уравнение, нужно свести его к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $u = \dfrac{y}{x}$. Тогда $y = ux,\ y' = u'x + ux'$, где u — некоторая функция аргумента x.

Пример 3. Решить уравнение $(x+y)dx+(x-y)dy=0$

Решение. Обозначим $P(x,y)=x+y$ и $Q(x,y)=x-y$. Данное уравнение будет однородным, так как $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — однородные функции первой степени.

Полагаем $u=\dfrac{y}{x}$; $y=ux$; $y'=u'x+u$, тогда подставляя в исходное уравнение, получим:

$$(x+ux)dx+(x-ux)(xdu+udx)=0;$$
$$(1-u)xdu+\left(1+2u-u^2\right)dx=0.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, находим:

$$\frac{(1-u)du}{1+2u-u^2}=-\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим:

$$\int\frac{(1-u)du}{1+2u-u^2}=-\int\frac{dx}{x},$$
$$\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+2u-u^2\right)}{1+2u-u^2}=-\int\frac{dx}{x},$$
$$\frac{1}{2}\ln\left|1+2u-u^2\right|=-\ln x+\frac{1}{2}\ln C,$$
$$\left(1+2u-u^2\right)x^2=C.$$

Подставляя вместо *u* его значения, получим

$$\left(1+2\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right)x^2=C,$$

Разделяя переменные, делим обе части уравнения на $\left(1+2u-u^2\right)$. Нужно проверить, не являются ли корни уравнения $1+2u-u^2=0$ решениями нашего дифференциального уравнения. Легко видеть, что числа $u=1\pm\sqrt{2}$ действительно являются корнями уравнения. Так как $u=\dfrac{y}{x}$, то $y=\left(1\pm\sqrt{2}\right)x$ — решения исходного дифференциального уравнения. Можно заметить, что эти решения содержатся в полученном нами равенстве $x^2+2xy-y^2=C^2$ при $C=0$, поэтому общий интеграл уравнения имеет вид $x^2+2xy-y^2=C^2$.

Пример 4. Решить однородное уравнение $y'=\dfrac{y}{x}\left(\ln\dfrac{y}{x}+1\right)$.

Решение. Введем вспомогательную функцию *u*.

$$u=\frac{y}{x};\quad y=ux;\quad y'=u'x+u\ ,$$

$$u'x+u=u(\ln u+1)\ ,$$

$$u'x+u=u\ln u+u\ ,$$

$$u'x=u\ln u\ .$$

Разделяем переменные:

$$\frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}\ .$$

Интегрируя, получаем:

$$\int\frac{du}{u\ln u}=\int\frac{dx}{x}\ ,$$

$$\ln\left|\ln u\right|=\ln\left|x\right|+C\ ,$$

$$\ln u=Cx\ ,$$

$$u=e^{Cx}\ .$$

Переходя к функции y, получаем общее решение: $y=xe^{Cx}$.

Пример 5. Решить уравнение $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$

Решение. Заданное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Сделаем замену $u=\frac{y}{x}$, где u — некоторая функция от аргумента x. Тогда

$$y=ux,\ y'=u'x+ux'=u'x+u\ .$$

Исходное уравнение приобретает вид:

$$u'x+u=\frac{ux}{x}+\sin\frac{ux}{x}\ ,$$

$$u'x+u=u+\sin u\ ,$$

$$\frac{du}{dx}x=\sin u\ ,$$

$$\frac{du}{\sin u}=\frac{dx}{x}\ .$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{du}{\sin u}=\int\frac{dx}{x}\ .$$

Получим:

$$\ln tg\,\frac{u}{2}=\ln\left(xC\right),$$

$$tg\frac{u}{2} = xC,$$

$$tg\frac{y}{2x} = xC,$$

$$\frac{y}{2x} = arctg(xC),$$

$$y = 2x \cdot arctg(xC).$$

$y = 2x \cdot arctgxC$ — общее решение уравнения.

Пример 6. Решить уравнение: $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}$

Решение. Заданное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Сделаем замену $u = \frac{y}{x}$, где u — некоторая функция от аргумента x. Тогда $y = ux,\ y' = u'x + u$.

Исходное уравнение приобретает вид:

$$u'x + u = \frac{ux}{x} + \sqrt{1 - \frac{u^2x^2}{x^2}},$$

$$u'x + u = u + \sqrt{1 - u^2},$$

$$\frac{du}{dx}x = \sqrt{1 - u^2},$$

$$\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{dx}{x}.$$

Получим:

$$\arcsin u = \ln(xC),$$

$$u = \sin(\ln(xC)).$$

$$\frac{y}{x} = \sin(\ln(xC)),$$

$$y = x\sin(\ln(xC)).$$

$y = x\sin(\ln(xC))$ — общее решение уравнения.

Занятие 4. Уравнения, приводящиеся к однородным уравнениям

Кроме уравнений, описанных выше, существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут быть приведены к однородным.

Это уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$.

<u>1 случай.</u> Если определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$ то переменные могут быть разделены подстановкой $x = x_1 + \alpha;$ $y = y_1 + \beta$, где α и β — решения системы уравнений $\begin{cases} a_1 \cdot \alpha + b_1 \cdot \beta + c_1 = 0 \\ a_2 \cdot \alpha + b_2 \cdot \beta + c_2 = 0 \end{cases}$.

Пример 1. Решить уравнение $(x-2y+3)dy + (2x+y-1)dx = 0.$

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y+1}{x-2y+3}.$$

Вычислим определитель: $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4+1 = 5 \neq 0$. Следовательно, данное уравнение можно свести к однородному.

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -2\alpha - \beta + 1 = 0 \\ \alpha - 2\beta + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 - 2\alpha \\ \alpha - 2 + 4\alpha + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1/5 \\ \beta = 7/5 \end{cases}.$$

Применяем подстановку

$x = x_1 - 1/5, \quad y = y_1 + 7/5, \quad dy = dy_1, \quad dx = dx_1:$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{-2\left(x_1 - \cancel{1/5}\right) - y_1 - \cancel{7/5} + 1}{x_1 - \cancel{1/5} - 2\left(y_1 + \cancel{7/5}\right) + 3} = \frac{-2x_1 - y_1}{x_1 - 2y_1}.$$

Получили однородное уравнение, которое решим с помощью подстановки

$$y_1 = ux_1, \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{du}{dx_1}x_1 + u.$$

Имеем:

$$\frac{du}{dx_1}x_1 + u = \frac{-2x_1 - ux_1}{x_1 - 2ux_1} = \frac{2+u}{2u-1}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{du}{dx_1}x_1 = \frac{2+u}{2u-1} - u = \frac{2+u-2u^2+u}{2u-1} = \frac{2(1+u-u^2)}{2u-1},$$

$$\frac{2u-1}{2\left(1+u-u^2\right)}du = \frac{dx_1}{x_1},$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{1-2u}{1+u-u^2}dt = \int\frac{dx_1}{x_1},$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+u-u^2\right| = \ln\left|x_1\right| + \frac{1}{2}\ln C,$$

$$\ln\left|1+u-u^2\right| = -2\ln\left|x_1\right| + \ln C,$$

$$\ln\left|1+u-u^2\right| = \ln\left|\frac{C}{x_1^{\,2}}\right|,$$

$$1+u-u^2 = \frac{C}{x_1^{\,2}}\cdot$$

Переходим теперь к первоначальной функции *y* и переменной *x*:

$$y_1 = ux_1, \quad u = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y-7/5}{x+1/5} = \frac{5y-7}{5x+1},$$

$$1+\frac{5y-7}{5x+1} - \left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2 = \frac{C}{\left(x+{}^1\!/_5\right)^2},$$

$$(5x+1)^2 + (5y-7)(5x+1) - (5y-7)^2 = 25C,$$

$$25x^2 + 10x + 1 + 25xy + 5y - 35x - 7 - 25y^2 + 70y - 49 = 25C,$$

$$25x^2 - 25x + 25xy + 75y - 25y^2 = 25C + 55,$$

$$x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C + \frac{55}{25}\cdot$$

Пусть $C + \frac{55}{25} = C_1\cdot$ Таким образом, $x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C_1$ — общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

<u>2 случай.</u> В случае, когда в исходном уравнении вида $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$ переменные могут быть разделены подстановкой $a_1x + b_1y = t.$

Пример 2. Решить уравнение $2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0$, $y(0)=2$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$$2(x+y)dy=\left(-3x-3y+1\right)dx, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-3x-3y+1}{2x+2y}.$$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-6+6=0$.

Применяем подстановку

$$3x+3y=t,\ x+y=\frac{t}{3},\ y=\frac{t}{3}-x,\ \frac{dy}{dx}=\frac{dt}{3dx}-1:$$

$$\frac{dt}{3dx}-1=\frac{-3t+3}{2t}, \quad \frac{dt}{3dx}=\frac{-3t+3}{2t}+1, \quad \frac{dt}{3dx}=\frac{-3t+3+2t}{2t},$$

.

$$\frac{dt}{3dx}=\frac{-t+3}{2t}, \quad \frac{tdt}{t-3}=-\frac{3}{2}dx$$

Интегрируем:

$$\int\left(1+\frac{3}{t-3}\right)dt=-\frac{3}{2}\int dx,$$

$$t+3\ln|t-3|=-\frac{3}{2}x+C.$$

Возвращаемся к первоначальной функции y и переменной x.

$$3x+3y+3\ln|3x+3y-3|=-\frac{3}{2}x+C,$$

$$x+y+\ln|3x+3y-3|=-\frac{1}{2}x+C,$$

$$2x+2y+2\ln|3(x+y-1)|=-x+2C,$$

$$3x+2y+2\ln 3+2\ln|x+y-1|=2C,$$

$3x+2y+2\ln|x+y-1|=2C-2\ln 3$ — общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Таким образом, получили общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Чтобы найти частное решение, подставим начальные условия:

$$3\cdot 0+2\cdot 2+2\ln|0+2-1|=2C-2\ln 3,$$

Получили $4=2C-2\ln 3, \quad C=2+\ln 3$.

Таким образом, мы получим частное решение исходного дифференциального уравнения:

$$3x + 2y + 2\ln|x + y - 1| = 2(2 + \ln 3) - 2\ln 3,$$

$$3x + 2y + 2\ln|x + y - 1| = 4.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Решить однородные дифференциальные уравнения:

1. $y' = \dfrac{x + 2y}{-x}$.
2. $y' = \dfrac{x - y}{x - 2y}$.
3. $xd\,y - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$.
4. $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^2}$.
5. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.
6. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$.
7. $x\,y\,y' = x^2 - y^2$.
8. $y' = \dfrac{2x + y}{x - y}$.
9. $\dfrac{dx}{y + x} = \dfrac{dy}{y - x}$.
10. $y' = \dfrac{x + 2y}{2x - y}$.
11. $xy' + xtg\,\dfrac{y}{x} = y$.
12. $y' = \dfrac{x + 8y}{8x + y}$.
13. $xy' + y\ln\dfrac{y}{x} = 0$.
14. $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$.
15. $x\,y\,y' = x^2 + y^2$.
16. $xy' + y\ln^2\dfrac{y}{x} = 0$.

17. $xy'\ln\frac{y}{x}=x+y\ln\frac{y}{x}$.

18. $xy'=y+2xctg\frac{y}{x}$.

19. $xyy'=2x^2+y^2$.

20. $x^2y'=y^2+xy+x^2$.

21. $(2x+y)y'=x+2y$.

22. $y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}$.

23. $(x-2y)y'=x+y$.

24. $xy'=y+3x\cdot\sin\frac{y}{x}$.

25. $xy'=y+y\ln\frac{y}{x}$.

26. $(3x+y)y'=x+3y$.

27. $y'=\frac{x+y}{x-y}$.

28. $y'=\frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x}+1\right)$.

29. $\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(y^2+2xy-x^2\right)dy=0$. Найти интегральную кривую, проходящую через точку (1; 1).

30. $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$. Найти интегральную кривую, проходящую через точку (1; 1).

2. Решить уравнения, сведя их к однородным:

31. $(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0$.

32. $(x+y+2)dx+(2x+2y-1)dy=0$.

33. $(2x+y+1)dx+(x+2y-1)dy=0$.

34. $(-7x+3y+7)dx-(3x-7y-3)dy=0$.

35. $(2x+8)dx+(-5x+3y-11)dy=0$.

Ответы

1.

1. $y=\frac{C}{x^2}-\frac{1}{3}x \quad (x\neq 0)$.

2. $x^2-2xy+y^2=C$.

3. $y=\frac{Cx^2}{2}-\frac{1}{2C} \quad (x=0).$

4. $y=x-\frac{2x}{\ln|x|+C}$.

5. $e^{-\frac{y}{x}}=\ln|Cx|$.

6. $y+\sqrt{3x^2+y^2}=Cx^3$.

7. $y=\sqrt{\frac{x^4C^4-1}{2x^2C^4}}$.

8. $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{y}{x\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\ln\left|2x^2+2y^2\right|=\ln C$.

9. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+arctg\frac{y}{x}=C$.

10. $2arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)=C$.

11. $y=x\arcsin\frac{C}{x}$.

12. $\frac{(y+x)^4}{(y-x)^4\left(y^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=C$.

13. $y=xe^{\frac{1-xC}{xC}}$.

14. $y=2x\cdot arctgxC.$

15. $y=\pm x\sqrt{2\ln xC}$.

16. $y=xe^{tg(\ln\frac{1}{xC})}$.

17. $y\ln y-y\ln x-y=x\ln xC$.

18. $y=x\arccos\frac{1}{(xC)^2}$.

19. $y=\pm 4x\sqrt{\ln xC}$.

20. $y=xtg(\ln xC).$

21. $\frac{y+x}{(y-x)\sqrt{x^2-y^2}}=C$.

22. $y=x\sin(\ln xC).$

23. $\frac{\sqrt{2}}{2} arctg\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 2y^2\right) = C$.

24. $y = 2xarctg(xC)^3$.

25. $y = xe^{xC}$.

26. $\frac{\sqrt{2}}{2} arctg\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 2y^2\right) = C$.

27. $arctg\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) = C$.

28. $y = xe^{Cx}$.

29. $x^2 + y^2 = x + y$.

30. $y^2 = 2x^2 \cdot \ln x + x$.

2.

31. $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$,

32. $x + 2y + 5\ln|x + y - 3| = C$,

33. $x^2 + xy + y^2 + x - y = C_1, \quad C_1 = C^2 - 1$,

34. $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$,

35. $(x + y - 1)^5 (x - y - 1)^2 = C$,

Занятие 5. Линейные уравнения

Определение. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad (1)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — заданные функции аргумента x, непрерывные на интервале $(a; b)$.

Если правая часть $q(x)$ равна нулю, то такое уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением.

Если правая часть $q(x)$ не равна нулю, то такое уравнение называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением.

Рассмотрим два основных метода решения линейных уравнений.

1. Метод Бернулли

Решение уравнения ищем в виде $y = uv$, где $u(x), v(x)$ — неизвестные пока функции. Найдем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u \text{ или } y' = u'v + v'u$$

Подставляя в уравнение (1), получим

$$\frac{du}{dx}v+\frac{dv}{dx}u+puv=q$$
$$\frac{du}{dx}v+u\left(\frac{dv}{dx}+pv\right)=q.$$

Функцию $v(x)$ выбираем как одно из решений уравнения
$$\frac{dv}{dx}+p(x)v=0$$
в виде $v(x)=e^{-\int p(x)dx}$.

Тогда $u(x)$ находим из уравнения
$$e^{-\int p(x)dx}\frac{du}{dx}=q(x),$$
то есть $u(x)=C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$, где C — произвольная постоянная. Перемножая $u(x)$ и $v(x)$, получим $y(x)$.

Пример 1. Решить уравнение $y'+\frac{y}{x}=x$.

Решение. Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций:
$$y=u(x)\cdot v(x),\ \text{тогда}\ y'=u'v+v'u.$$

Подставим в исходное уравнение:
$$u'v+v'u+\frac{1}{x}uv=x$$
$$u'v+u\left(v'+\frac{1}{x}v\right)=x\cdot$$

Выберем функцию так, чтобы
$$v'+\frac{1}{x}v=0\cdot$$

Решим это уравнение с разделяющимися переменными
$$\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=0,$$
$$\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{x}v,$$
$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x},$$
$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -\ln|x|,$$

$$v = \frac{1}{x}\cdot$$

Функцию u находим из уравнения

$$u'\frac{1}{x} = x,$$

$$\frac{du}{dx} = x^2,$$

$$u = \int x^2 dx + C,$$

$$u = \frac{x^3}{3} + C\cdot$$

Тогда $y = uv = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)\cdot\frac{1}{x}$, $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$ — общее решение уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 y' + y = ax^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Сначала приведем данное уравнение к стандартному виду:

$$y' + \frac{1}{x^2} y = ae^{\frac{1}{x}}.$$

Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций:

$y = u(x)\cdot v(x)$, тогда $y' = u'v + v'u$.

Подставим в исходное уравнение:

$$u'v + v'u + \frac{1}{x^2} uv = ae^{\frac{1}{x}}$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x^2} v\right) = ae^{\frac{1}{x}}.$$

Выберем функцию так, чтобы

$$v' + \frac{1}{x^2} v = 0\cdot$$

Решим это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x^2} v = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x^2} v,$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x^2},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x^2},$$

$$\ln|v| = \frac{1}{x},$$

$$v = e^{\frac{1}{x}}.$$

Функцию u находим из уравнения

$$u'e^{\frac{1}{x}} = ae^{\frac{1}{x}},$$

$$\frac{du}{dx} = a,$$

$$du = adx,$$

$$u = a\int dx + C,$$

$$u = ax + C.$$

Тогда $y = uv = (ax + C) \cdot e^{\frac{1}{x}}$ — общее решение уравнения.

2. Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).

Требуется найти решение уравнения $y' + p(x)y = q(x)$.

Основная идея этого метода состоит в том, что решение неоднородного линейного уравнения ищем в том же виде, что и общее решение однородного дифференциального уравнения, только считаем, что постоянная интегрирования есть функция от *x*.

При этом будем использовать следующую теорему о структуре общего решения неоднородного уравнения.

Теорема. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения есть сумма общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения.

В качестве примера рассмотрим уравнение из примера 1.

Пример 3. Решить уравнение $y' + \frac{y}{x} = x$.

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего данному линейного однородного уравнения

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C,$$

$$y = \frac{C}{x}.$$

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения будем искать в том же виде, только постоянную C будем считать функцией от x:

$$y = \frac{C(x)}{x}.$$

Найдем производную

$$y' = C'(x) \cdot \frac{1}{x} - C(x) \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Подставив y и y' в исходное уравнение, будем иметь:

$$C'(x) \cdot \frac{1}{x} - C(x) \cdot \frac{1}{x^2} + C(x) \cdot \frac{1}{x^2} = x,$$

$$C'(x) \cdot \frac{1}{x} = x,$$

$$C'(x) = x^2,$$

$$C(x) = \frac{x^3}{3} + \overline{C}, \text{ где } \overline{C} = const.$$

Тогда $y = \left(\frac{x^3}{3} + \overline{C}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{\overline{C}}{x}$ — общее решение уравнения.

Задание. Сравнить ответы и основные этапы решения уравнения двумя рассмотренными способами.

Задания для самостоятельного решения

1. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения:

1. $y' + \frac{2y}{x} = x^3$.

2. $y' + \frac{y}{x} = xe^{\frac{x}{2}}$.

3. $y' - y\sin x = \sin x \cdot \cos x$.

4. $y' + y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

5. $xy' - y = x^3$.

6. $y' + y = 2e^x$.

7. $\frac{dy}{dx} = x + y$.

8. $y' + x^2 y = x^2$.

9. $y' + \frac{y}{x+1} + x^2 = 0$.

10. $y' = 2\sin x + 5y$.

11. $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3$.

12. $y' - y = e^x$.

13. $y' - \frac{y}{x} = x \cdot \cos x$.

14. $y' - \frac{y}{\sin x} = \cos^2 \ln tg\frac{x}{2}$.

2. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

15. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1$.

16. $xy' = x + \frac{1}{2} y, \quad y(1) = 0$.

17. $xy' + y = \ln x, \quad y(1) = 0$.

18. $(x + y)\frac{dy}{dx} = 1, \quad y(-1) = 0$.

19. $xy' - y = x^2 \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

20. $\frac{dy}{dx} + y - x = 2, \quad y(0) = 2$.

21. $y' \cos^2 x + y = x^2 tgx, \quad y(0) = 0$.

Ответы

1.

1. $y = \frac{1}{6} x^4 + \frac{C}{x^2}$.

2. $y=\left(x-4+\frac{8}{x}\right)e^{\frac{x}{2}}+\frac{C}{x}$,

3. $y=Ce^{-\cos x}-\cos x+1$,

4. $y=\frac{1}{x}+Ce^{-x}$,

5. $y=\frac{x^3}{2}+Cx$,

6. $y=e^x+Ce^{-x}$,

7. $y=Ce^x-x-1$,

8. $y=1+Ce^{-\frac{x^3}{3}}$,

9. $y=\dfrac{C-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4}{x+1}$,

10. $y=Ce^{5x}-\frac{5}{13}\left(\sin x+\frac{1}{5}\cos x\right)$,

11. $y=\frac{(x+1)^4}{2}+C(x+1)^2$,

12. $y=(x+C)e^x$,

13. $y=x(\sin x+C)$,

14. $y=tg\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C\right)$,

15. $y=-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}$.

2.

16. $y=\sqrt{x}\left(C+2\sqrt{x}\right)$, $y=\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-2\right)$,

17. $y=\ln x-1+\frac{C}{x}$, $y=\ln x-1+\frac{1}{x}$,

18. $y=-(x+1)$,

19. $y=x(\sin x+C)$, $y=x\sin x$,

20. $y=Ce^{-x}+x+1$, $y=e^{-x}+x+1$,

21. $y=tgx-1+Ce^{-tgx}$.

Занятие 6. Уравнение Бернулли

Определение. Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

где $p(x)$, $q(x)$ — известные непрерывные на интервале (a; b) функции, α — любое действительное число, отличное от 0 и 1, называется уравнением Бернулли.

С помощью подстановки $z = y^{1-\alpha} = \dfrac{1}{y^{\alpha-1}}$ уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению. Отсюда $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $y' = \dfrac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot z'$.

Подставим y, y' в уравнение Бернулли:

$$\frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot z' + pz^{\frac{1}{1-\alpha}} = qz^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot z' + pz = q,$$

$z' + (1-\alpha)pz = (1-\alpha)q$ — линейное дифференциальное уравнение.

Пример 1. Решить уравнение $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$

Решение. Разделим обе части уравнения на x:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} y = x\sqrt{y}.$$

С помощью подстановки $z = \sqrt{y}$, $y = z^2$, $y' = 2z \cdot z'$ уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению:

$$2z \cdot z' - \frac{4}{x} z^2 = x \cdot z,$$

$$z' - \frac{2}{x} z = \frac{x}{2},$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = \frac{x}{2}.$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций:

$$z = u(x) \cdot v(x),$$

тогда $z' = u'v + v'u$.

Подставим в исходное уравнение:

$$u'v+v'u-\frac{2}{x}uv=\frac{x}{2},$$
$$u'v+u\left(v'-\frac{2}{x}v\right)=\frac{x}{2}.$$
Выберем функцию так, чтобы
$$v'-\frac{2}{x}v=0.$$
Решим это уравнение с разделяющимися переменными
$$\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v=0,$$
$$\frac{dv}{v}=2\frac{dx}{x},$$
$$\int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x},$$
$$\ln v=2\ln x,$$
$$\ln v=\ln x^2,$$
$$v=x^2.$$
Функцию u находим из уравнения
$$u'x^2=\frac{x}{2},$$
$$du=\frac{dx}{2x},$$
$$\int du=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x},$$
$$u=\frac{\ln x}{2}+C,$$
Тогда $z=uv=\left(\frac{\ln x}{2}+C\right)\cdot x^2$.

Произведя обратную подстановку, получаем:
$$\sqrt{y}=\left(\frac{\ln x}{2}+C\right)\cdot x^2,$$
$y=\left(\frac{\ln x}{2}+C\right)^2\cdot x^4$ — общее решение уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $xy'+y=y^2\ln x, \quad y(1)=1$.

Решение. Разделим уравнение на x: $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$. С помощью подстановки $z = \frac{1}{y}$ преобразуем уравнение Бернулли в линейное уравнение. Имеем, $y = \frac{1}{z}$, $y' = -\frac{1}{z^2} z'$. Подставим $y,\ y'$ в уравнение Бернулли:

$$-\frac{1}{z^2} z' + \frac{1}{zx} = \frac{1}{z^2} \ln x.$$

Умножим обе части уравнения на $-z^2$, получим

$z' - \frac{1}{x} z = -\ln x$ — линейное дифференциальное уравнение.

Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций: $z = u(x) \cdot v(x)$, тогда $z' = u'v + v'u$. Подставим в исходное уравнение:

$$u'v + v'u - \frac{1}{x} uv = -\ln x,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{x} v\right) = -\ln x.$$

Выберем функцию так, чтобы

$$v' - \frac{1}{x} v = 0 \cdot$$

Решим это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x} v = 0,$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = \ln|x|,$$

$$v = x.$$

Функцию u находим из уравнения

$$u'x = -\ln x,$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\ln x}{x},$$

$$\int du = -\int \frac{\ln x}{x} dx \cdot$$

Вычислим интеграл $-\int \frac{\ln x}{x} dx$ с помощью замены переменной. Применим подстановку $t = \ln x$. Тогда $dt = \frac{dx}{x}$. Имеем:

$$-\int \frac{\ln x}{x} dx = -\int t dt = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{\ln^2 x}{2} + C \cdot$$

Таким образом, получаем:

$$u = -\frac{\ln^2 x}{2} + C \cdot$$

Тогда $z = uv = \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right) \cdot x \cdot$

Произведя обратную подстановку, получаем:

$$\frac{1}{y} = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right) \cdot$$

Таким образом, $y = \dfrac{1}{x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right)}$ — общее решение исходного уравнения.

Подставим начальные условия:

$$1 = \frac{1}{1\left(-\frac{\ln^2 1}{2} + C \right)} \Rightarrow C = 1 \cdot$$

Итак, $y = \dfrac{1}{x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + 1 \right)}$ — частное решение исходного уравнения.

Задания для самостоятельного решения

1. Решить уравнение Бернулли:

1. $yy' - xe^{2\sqrt{x}} = \dfrac{y^2}{2\sqrt{x}}$.

2. $y' = x^4 y^2 - \dfrac{2y}{x}$.

3. $xy' + y = y^2 \ln x$.

4. $y' + 2y - y^2 e^{-x} = 0$.

5. $y' = 2\sqrt{\dfrac{x}{y^3} - \dfrac{y}{x}}$.

6. $y' - ytgx = -y^2 \cos x$.

7. $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$.

8. $x^3 y' = y\left(x^2 + y^2\right)$.

9. $y' = \dfrac{3x^2}{x^3 + y + 1}$.

10. $xy' - x - 5y = 0$.

11. $y' - y + y^2 e^{-x} \cdot \cos x = 0$.

2. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

12. $y' + \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3 e^{x+1} y^2,\ y(0) = 1$.

13. $xy' = \dfrac{y^2}{x} + y, \quad y(1) = 1$.

14. $y'\left(1 + x^2\right) = xy + 2x, \quad y(0) = 0$.

15. $y'y^2\sqrt{x^2 - 3} + 1 - y^3 = 0, \quad y(2) = 2$.

16. $x^2 y' = y^2 - 3xy,\ y\left(\dfrac{1}{4}\right) = -1$.

Ответы

1.

1. $y^2 = \left(x^2 + C\right)e^{2\sqrt{x}}$.

2. $y = -\dfrac{3}{x^5 + Cx^2}$.

3. $y = \dfrac{1}{\ln x + Cx + 1}$.

4. $y = \dfrac{3e^x}{1 + Ce^{3x}}$.

5. $y = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{5}{4}x^4 + C\right)^{\frac{2}{5}}$.

6. $y=\dfrac{1}{\cos x(x+C)}$.

7. $y=\dfrac{x^4\ln^2|Cx|}{4}$.

8. $y^2=\dfrac{x^2}{\ln\left|Cx^{-2}\right|}$.

9. $x=-\left(y+2+Ce^y\right)^{\frac{1}{2}}$.

10. $y=Cx^5-\dfrac{x}{4}$.

11. $\dfrac{1}{2}\ln\left|y^2+6y+10\right|-5arctg(y+3)=x(\ln x-1)xC$.

2.

12. $y=(x+1)^{-2}\left[e^{x+1}-(x+1)e^{x+1}+1\right]^{-1}$.

13. $y=2\sqrt{x^2+1}-2$.

14. $\sin\dfrac{y}{x}=1+\ln x$.

15. $\sqrt[3]{y^3-1}=\dfrac{\sqrt[3]{7}}{3}\left(x+\sqrt{x^2}-3\right)$.

16. $\sqrt[4]{1-\dfrac{4x}{y}}=4x\sqrt{2}$.

Занятие 7. Уравнения в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$.

Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой области *D*.

Для того чтобы выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ было полным дифференциалом функции $F(x,y)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) можно представить в виде $dF(x,\, y)=0$.

Следовательно, $F(x,\, y)=C$ — общее решение уравнения (1).

Чтобы найти общее решение уравнения в полных дифференциалах, нужно найти функцию $F(x,y)$ по известным функциям $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

Пусть условие (2) выполняется, тогда, интегрируя уравнение (1), найдем общий интеграл по формулам:

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,\, y)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,\, y)dy=C \qquad (3)$$

или

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,\, y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\, y)dy=C \qquad (4),$$

где $(x_0,\, y_0)$ — произвольная точка области *D*.

Пример 1. Решить уравнение $(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0$.

Решение. Проверим условие $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

Имеем $P(x,\, y)=x+y+1, \quad Q(x,\, y)=x-y^2+3$.

Отсюда находим:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=1,\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=1\cdot$$

Условие выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Общее решение найдем по формуле (4), выбирая $(x_0,\, y_0)=(0,1)$:

$$\int\limits_{0}^{x}(x+2)dx+\int\limits_{1}^{y}\left(x-y^2+3\right)dy=C,$$

$$\frac{x^2}{2}+2x+xy-\frac{y^3}{3}+3y-x+\frac{1}{3}-3=C,$$

$$\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y=C_1.$$

Таким образом, $\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y=C_1$ — общий интеграл данного уравнения.

Для решения уравнений в полных дифференциалах можно использовать более удобный способ, без применения формул (3) и (4).

Функцию $F(x,y)$ найдем по функциям $P(x,y)$ и $Q(x,y)$:

$$dF = Pdx + Qdy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} = P(x,\, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,\, y).$$

Интегрируя первое равенство, получим

$$F(x,y) = \int P(x,\, y)dx + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция аргумента *y*.

Из второго равенства имеем

$$Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,\, y)dx\right) + \varphi'(y).$$

Отсюда находим функцию $\varphi'(y)$, а следовательно, и функцию $F(x,y)$.

Пример 2. Решить уравнение $(3x^2+10xy)dx+(5x^2-1)dy=0$.

Решение. Проверим условие $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (3x^2+10xy)}{\partial y} = 10x, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \left(5x^2-1\right)}{\partial x} = 10x.$$

Условие выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Определим функцию $F(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,\, y) = 3x^2 + 10xy,$$

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx = \int (3x^2+10xy)dx = x^3 + 5x^2y + \varphi(y).$$

Продифференцируем это равенство по *y*:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 5x^2 + \varphi'(y).$$

С другой стороны, имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,\, y) = 5x^2 - 1.$$

Следовательно, $5x^2 + \varphi'(y) = 5x^2 - 1$.

Отсюда $\varphi'(y) = -1, \quad \Rightarrow \varphi(y) = \int(-1)dy = -y + C_1$.

Таким образом, $F(x, y) = x^3 + 5x^2 y - y + C_1$.

Общий интеграл исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$x^3 + 5x^2 y - y = C.$$

Задания для самостоятельного решения

1. $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$.
2. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0.$
3. $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$.
4. $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2 y + y^2)dy = 0$.
5. $(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4})dx = \frac{2ydy}{x^3}$.
6. $\frac{x^2 dy - y^2 dx}{(x - y)^2} = 0$.
7. $xdx + ydy = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$.
8. $(3xy^2 + x^3)dx + (3x^2 y + y^3)dy = 0$.
9. $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$.
10. $\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)dx - \frac{2y}{x}dy = 0$.
11. $ydy = (xdy + ydx)\sqrt{1 + y^2}$.
12. $(y\cos x + 2xy^2)dx + (\sin x - a\sin y + 2x^2 y)dy = 0$.
13. $yx^{y-1}dx + x^y \ln xdy = 0$.
14. $\frac{(2x + y)dy + xdx}{(x + y)^2} = 0$.
15. $\left(-1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)ydy + \left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx = 0$.
16. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4y^3)dy = 0$.
17. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dy = 0$.
18. $(3x\sin y + 1)dx + (\frac{3}{2}x^2 \cos y + 3)dy = 0$.
19. $(\sin xy + xy\cos xy)dx + x^2 \cos xydy = 0$.
20. $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$.

Ответы

1. $\frac{x^3}{3}+xy-y^2=C$.
2. $x^2-xy+y^2+x-y=C$.
3. $2y^2-xy+x^3=C$.
4. $x^4+3x^2y^2+y^3=C$.
5. $x^2+y^2=Cx^3$.
6. $\frac{xy}{x-y}=C$.
7. $x^2+y^2-2arctg\frac{x}{y}=C$.
8. $\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}=C$.
9. $x+e^{\frac{x}{y}}y=C$.
10. $x-\frac{y^2}{x}=C$.
11. $xy-\sqrt{1+y^2}=C$.
12. $y\sin x+x^2y^2+a\cos y=C$.
13. $x^y=C$.
14. $\ln(x+y)-\frac{x}{x+y}=C$.
15. $x+\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{y^2}{2}=C$.
16. $x^3+3x^2y^2+y^4=6$.
17. $\sqrt{x^2+y^2}-\ln x+\frac{x}{y}+\ln y=C$.
18. $\frac{3}{2}x^2\sin y+x+3y=C$.
19. $x\sin xy=C$.
20. $e^x+yx+\sin yx+e^y=C$.

Занятие 8. Интегрирующий множитель

Пусть левая часть дифференциального уравнения первого порядка

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

не является полным дифференциалом. Иногда удается найти такую функцию $\mu(x,y)$, после умножения на которую левая часть уравнения (1) становится полным дифференциалом. Функция $\mu(x,y)$ называется *интегрирующим множителем* уравнения (1).

Заметим, что общее решение уравнения, полученного после умножения на $\mu(x,y)$, совпадает с общим решением исходного уравнения.

Интегрирующим множителем уравнения (1) является всякая функция $\mu(x,y)$, удовлетворяющая уравнению

$$P\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y}-Q\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (2)$$

В общем случае нахождение интегрирующего множителя для уравнения (1) является сложной задачей. Поэтому рассмотрим частные случаи, когда уравнение (1) имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x или только от y.

Если выражение

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x} \qquad (3)$$

не зависит от y, а зависит только от x, то можно найти *интегрирующий множитель*, зависящий только от x.

Если выражение

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}=\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y} \qquad (4)$$

не зависит от x, а зависит только от y, то можно найти *интегрирующий множитель*, зависящий только от y.

Пример 1. Решить уравнение $(xy^2+y)dx=xdy$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$(xy^2+y)dx-xdy=0,$$

тогда

$P(x,y)=xy^2+y,\quad Q(x,y)=-x,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=2xy+1,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1,\quad \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$, то есть данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Проверим, не имеет ли это уравнение интегрирующий множитель, зависящий только от одной из переменных.

Заметим, что $\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}=\dfrac{-1-2xy-1}{xy^2+y}=\dfrac{-2(xy+1)}{y(xy+1)}=-\dfrac{2}{y}$, тогда уравнение (1) имеет интегрирующий множитель, зависящий только от y.

Найдем этот множитель

$$\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y}=\frac{-2}{y}\quad\Rightarrow\quad \ln\mu=-2\ln y,$$

тогда $\mu(y)=\dfrac{1}{y^2}$.

Умножив все члены уравнения на полученный интегрирующий множитель, имеем уравнение:

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0.$$

Легко проверить, что полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Решим это уравнение.

Найдем такую функцию $F(x,y)$, для которой левая часть дифференциального уравнения будет полным дифференциалом, тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x}=x+\frac{1}{y}.$$

Интегрируя по x, получим

$$F(x,y)=\int\left(x+\frac{1}{y}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}+\varphi(y).$$

Чтобы найти $\varphi(y)$, используем условие

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}+\varphi'(y).$$

Сравнивая два последних выражения, получим:

$$-\frac{x}{y^2}+\varphi'(y)=-\frac{x}{y^2}.$$

Следовательно, $\varphi'(y)=0$. Тогда $\varphi(y)=C_1$.

Окончательно получаем

$$F(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}+C_1.$$

Таким образом, общее решение уравнения имеет вид:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}=C \text{ или } y=-\frac{2x}{x^2+2C}.$$

Пример 2. Решить уравнение $\left(x^2-\sin^2 y\right)dx+x\sin 2y dy=0$.

Решение. Пусть $P(x,y)=x^2-\sin y^2, \quad Q(x,y)=x\sin 2y$. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2\sin y\cdot\cos y=-\sin 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\sin 2y, \quad \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Следовательно, данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Проверим, не имеет ли это уравнение интегрирующий множитель, зависящий только от одной из переменных.

Выражение $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\dfrac{-\sin 2y-\sin 2y}{x\sin 2y}=\dfrac{-2\sin 2y}{x\sin 2y}=-\dfrac{2}{x}$, значит интегрирующий множитель, зависящий только от *x*, найдем из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}=\frac{-2}{x} \quad\Rightarrow\quad \ln\mu=-2\ln x \quad\Rightarrow\quad \mu(x)=\frac{1}{x^2}.$$

Умножим исходное уравнение на полученный интегрирующий множитель:

$$\left(1-\frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx+\frac{\sin 2y}{x}dy=0.$$

Это уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Можно решить его вышеизложенным методом. Но, если представить его в виде

$$dx+\frac{x\cdot\sin 2y\,dy-\sin^2 y\,dx}{x^2}=0,$$

то левая часть этого уравнения есть полный дифференциал

$$d\left(x+\frac{\sin^2 y}{x}\right)=0\cdot$$

Откуда

$$x+\frac{\sin^2 y}{x}=C \text{ — общее решение уравнения.}$$

Пример 3. Решить уравнение $\left(1-x^2y\right)dx+x^2(y-x)dy=0$.

Решение. Имеем $P(x,y)=1-x^2y,\quad Q(x,y)=x^2(y-x)$, следовательно, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-x^2,\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2xy-3x^2,\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то есть данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Проверим, не имеет ли это уравнение интегрирующий множитель, зависящий только от одной из переменных.

Заметим, что

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{-x^2-2xy+3x^2}{x^2(y-x)}=\frac{2x^2-2xy}{x^2(y-x)}=\frac{2x(x-y)}{x^2(y-x)}=-\frac{2}{x},$$

тогда уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от *x*.

Найдем этот множитель

$$\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}=\frac{-2}{x}\quad\Rightarrow\quad \ln\mu=-2\ln x,$$

тогда $\mu(y)=\dfrac{1}{x^2}$.

Умножив все члены уравнения на полученный интегрирующий множитель, получаем уравнение:

$$\left(\frac{1}{x^2}-y\right)dx+(y-x)dy=0.$$

Легко проверить, что полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Решим это уравнение: найдем такую функцию $F(x,y)$, для которой левая часть дифференциального уравнения будет полным дифференциалом, тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{x^2}-y.$$

Интегрируя по x, получим

$$F(x,y)=\int\left(\frac{1}{x^2}-y\right)dx=-\frac{1}{x}-yx+\varphi(y).$$

Чтобы найти $\varphi(y)$, используем условие

$$\frac{\partial F}{\partial y}=y-x.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-x+\varphi'(y).$$

Сравнивая два последних выражения, получим:

$$-x+\varphi'(y)=y-x.$$

Следовательно, $\varphi'(y)=y$, тогда $\varphi(y)=\frac{y^2}{2}+C_1$.

Окончательно получаем

$$F(x,y)=-\frac{1}{x}-xy+\frac{y^2}{2}+C_1$$

Таким образом, общее решение уравнения имеет вид:

$$-\frac{1}{x}-xy+\frac{y^2}{2}=C.$$

Задания для самостоятельного решения

Решить дифференциальные уравнения:

1. $\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0$.
2. $xy'+\left(\sin y-3x^2\cos y\right)\cos y=0$.
3. $2ydx=(2x+1+\ln y)dy$.
4. $\left(x^2+y^2\right)dx-2yxdy=0$.
5. $2xydx+\left(y^2-3x^2\right)dy=0$.
6. $\frac{ydx}{x}+\left(y^3-\ln x\right)dy=0$.
7. $\left(x+y^2\right)dx+2yxdy=0$.
8. $y(1-xy)dx-xdy=0$.
9. $\left(xy^2-y^3\right)dx+\left(1-y^2x\right)dy=0$.
10. $\left(y^2-2x-2\right)dx+2ydy=0$.
11. $y^2dx+(yx-1)dy=0$.

12. $\left(2y+xy^3\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$.

13. $\left(1+x^2y\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$.

Ответы

1. $ye^x\left(x^2+\dfrac{y^2}{3}\right)=C$.
2. $xtgy-x^3=C$.
3. $\dfrac{\ln y+2x+2}{y}=C$.
4. $x-\dfrac{y^2}{x}=C$.
5. $\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y}=C$.
6. $\dfrac{\ln x}{y}+\dfrac{y^2}{2}=C$.
7. $\ln x-\dfrac{y^2}{x}=C$.
8. $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{2}=C$.
9. $x^2y-2xy^2-2-2Cy=0$.
10. $e^xy^2-2xe^x=C$.
11. $xy-\ln y=C$.
12. $3x^2y+x^3y^3=C$.
13. $xy+y^2-\dfrac{2}{x}=C$.

Занятие 9. Определение типа дифференциальных уравнений первого порядка и их решение

Для решения дифференциального уравнения первого порядка сначала надо определить тип, к которому оно относится. Необходимо разрешить его относительно первой производной, то есть привести его к виду $y'=f(x,y)$, и по виду правой части определить тип уравнения.

В некоторых случаях удобно приводить дифференциальное уравнение к виду:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$$

чтобы проверить, не является ли это уравнение однородным (если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — однородные функции одного порядка) или уравнением в полных дифференциалах (если выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$).

Пример 1. Найти общее решение уравнения $\sin^2 3x\cdot y'=\cos 3x$.

Решение. Имеем дифференциальное уравнение первого порядка. Разрешим его относительно первой производной y'. Для этого разделим обе части на $\sin^2 3x$. Заметим, что $\sin^2 3x\neq 0$, так как $\sin 3x$ и $\cos 3x$ одновременно в нуль не обращаются. Уравнение примет вид:

$$y'=\frac{\cos 3x}{\sin^2 3x}.$$

Так как правая часть этого уравнения зависит только от *x*, то оно относится к виду $y'=f(x)$. Это простейшее уравнение решается интегрированием:

$$y=\int\frac{\cos 3x}{\sin^2 3x}dx;$$

$$y=\frac{1}{3}\int\frac{d(\sin 3x)}{\sin^2 3x};$$

Таким образом, $y=-\frac{1}{3\sin 3x}+C$ — общее решение уравнения.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $(4x-y)dx+(2y-x)dy=0$.

Решение. Это уравнение не является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Коэффициенты $P(x,y)=4x-y$ и $Q(x,y)=2y-x$ — являются однородными функциями первого порядка. Следовательно, данное дифференциальное уравнение является однородным. Но это уравнение является также уравнением в полных дифференциалах, так как $\frac{\partial P}{\partial y}=-1$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=-1$, т. е. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Решим его как уравнение в полных дифференциалах с помощью формулы

$$\int_0^x(4x-y)dx+\int_0^y(2y-0)dy=C;$$

Откуда имеем общее решение:

$$2x^2 - xy + y^2 = C.$$

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение $y' + \dfrac{2y}{x} - xy^2 = 0$.

Решение. Заметим, что это уравнение не относится ни к дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными, ни к однородным, ни к линейным. Запишем его в виде

$$y' + \frac{2}{x}y = xy^2.$$

Это уравнение Бернулли $(\alpha = 2)$. Выше показано, что с помощью подстановки $z = \dfrac{1}{y^{\alpha-1}} = y^{1-\alpha} = y^{1-2} = y^{-1}$ уравнение Бернулли сводится к линейному дифференциальному уравнению. Но можно это уравнение решить непосредственно с помощью подстановки $y = uv$. Тогда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}v + \dfrac{dv}{dx}u$ или $y' = u'v + v'u$.

Подставляя в уравнение, получим

$$u'v + v'u + \frac{2}{x}uv = (uv)^2 x$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{2}{x}v\right) = (uv)^2 x.$$

Выберем функцию так, чтобы

$$v' + \frac{2}{x}v = 0.$$

Решим это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2}{x}v,$$

$$\frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dv}{v} = -2\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln v = -2\ln x,$$

$$v = \frac{1}{x^2}.$$

Подставляя в последнее уравнение, находим:

$$u'v = (uv)^2 x,$$

$$u' \frac{1}{x^2} = u^2 \left(\frac{1}{x^2} \right)^2 x,$$

$$\frac{du}{dx} = u^2 \frac{1}{x^2} x,$$

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C,$$

$$-\frac{1}{u} = \ln|xC|,$$

$$u = -\frac{1}{\ln|xC|}.$$

Отсюда имеем $y = uv = -\dfrac{1}{x^2 \ln|xC|}$.

Задания для самостоятельного решения

Определить тип дифференциальных уравнений первого порядка и решить их:

1. $\left(x^2 + y\right)dx + (x - 2y)dy = 0$.
2. $(y \ln x - 2)y dx = x dy$.
3. $xyy' = 1 - x^2$.
4. $xy' + y = y^2, \quad y(1) = \dfrac{1}{2}$.
5. $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(x^2 y - y\right)dy = 0, \quad y(0) = 1$.
6. $(x - y + 1)y' = x + y + 1$.
7. $(x + y)\dfrac{dy}{dx} = (y - x)$.
8. $xy' - y = x^2 \cos x$.

9. $x^2 y' = xyy' - y^2$.

10. $\left(y^3 - x\right)y' = y$.

11. $(y-3)dx + x^2 dy = 0$.

12. $y' = \dfrac{x-1}{y}$.

Ответы

1. $\dfrac{1}{3}x^2 + xy - y^2 = C$.
2. $y\left(Cx + \ln|x| + 1\right) = 1$.
3. $x^2 + y^2 = \ln\left(Cx^2\right)$.
4. $y(1 - Cx) = 1$.
5. $1 + y^2 = \dfrac{2}{1 - x^2}$.
6. $(x+1)^2 - (y-1)^2 = C$.
7. $arctg\dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) = C$.
8. $y = Cx + x\sin x$.
9. $y = Ce^{\frac{y}{x}}$, $y = 0$.
10. $y^4 = 4xy + C$.
11. $y - 3 = Ce^{\frac{1}{x}}$.
12. $y^2 = x^2 - 2x + C$.

Занятие 10. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям первого порядка

Составление дифференциальной модели реального эволюционного процесса состоит из следующих этапов:

1) составление дифференциального уравнения;
2) решение полученного уравнения;
3) исследование решения.

Таким образом, получаем определенную функциональную характеристику изучаемого процесса. Для построения математической модели требуется достаточно полная информация о течении этого процесса.

При решении геометрических задач пользуемся геометрическим смыслом производной (тангенс угла наклона касательной); при решении физических задач учитываем физический смысл производной (скорость протекания процесса) или используем известные физические законы и т. п.

Задача 1 (о распаде радия). Известно, что скорость распада радия пропорциональна его количеству. Требуется найти зависимость количества радия от времени t, если известно его первоначальное количество m_0 и период полураспада T.

Решение. Пусть $m(t)$ — функция, описывающая количество радия в момент времени t. Скорость распада радия $\frac{dm}{dt}$ является отрицательной, так как $m(t)$ — убывающая функция.

Из условия задачи известно, что скорость распада радия пропорциональна его количеству, поэтому получим уравнение

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

Мы получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, находим общее решение

$$\frac{dm}{m} = -kdt,$$

$$\int \frac{dm}{m} = -k\int dt,$$

$$\ln m = -kt + \ln C,$$

$m = C \cdot e^{-kt}$ — общее решение дифференциального уравнения.

Найдем постоянные C и k Для определения C воспользуемся начальным условием

$$m(0) = m_0.$$

Подставляя в общее решение, получим $C = m_0$. Следовательно, $m = m_0 e^{-kt}$.

Для определения k воспользуемся дополнительным условием

$$t = T, \quad m(T) = \frac{1}{2} m_0.$$

Подставим в последнее равенство

$$\frac{1}{2} m_0 = m_0 \cdot e^{-kt},$$

$$e^{-kt} = \frac{1}{2},$$

$$-kT = \ln\frac{1}{2},$$

$$k = \frac{1}{T}\ln 2 \cdot$$

В итоге получим $m = m_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$ — закон зависимости количества радия *m* от времени *t*.

Задача 2 (о законе движения некоторых типов парашютов).

С некоторой высоты сброшено тело массой *m*. Найти закон изменения скорости *v* падения этого тела, если на него, кроме силы тяжести, действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости.

Решение. Применим второй закон Ньютона

$$F = ma \text{ или } F = m\frac{dv}{dt},$$

где *F* — сила, действующая на тело в направлении движения, $a = \frac{dv}{dt}$ — ускорение тела. Сила *F* есть сумма двух сил: силы тяжести mg и силы сопротивления воздуха kv (сила направлена в сторону, противоположную движению тела).

В итоге получим уравнение:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \cdot$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции *v(t)*, которое часто называют уравнением движения некоторых типов парашютов.

Это уравнение является линейным дифференциальным уравнением. Решим его методом Бернулли. Перепишем уравнение в виде:

$$m\frac{dv}{dt} + kv = mg,$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \cdot$$

Пусть $v = p(t)q(t)$, где $p(t)$ и $q(t)$ — неизвестные пока функции аргумента *t*.

Найдем производную

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dt}q + \frac{dq}{dt}p,$$

Подставим в уравнение

$$\frac{dp}{dt}q+\frac{dq}{dt}p+\frac{k}{m}pq=g;$$

$$\frac{dp}{dt}q+p\left(\frac{dq}{dt}+\frac{k}{m}q\right)=g;$$

Найдем q такую, чтобы

$$\frac{dq}{dt}+\frac{k}{m}q=0.$$

Решим это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dq}{q}=-\frac{k}{m}dt;$$

$$\int\frac{dq}{q}=-\frac{k}{m}\int dt;$$

$$\ln q=-\frac{k}{m}t;$$

$$q=e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Учитывая вид функции q, найдем p:

$$\frac{dp}{dt}e^{-\frac{k}{m}t}=g;$$

$$\frac{dp}{dt}=ge^{\frac{k}{m}t};$$

$$p=g\int e^{\frac{k}{m}t}dt=\frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t}+C,$$

где C — произвольная постоянная. В итоге получим общее решение нашего уравнения:

$$v(t)=Ce^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}.$$

Чтобы найти искомую зависимость v от t, надо выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$t=0,\quad v(0)=v_0,$$

где v_0 — начальная скорость тела.

Подставляя $t=0$ в формулу для общего решения, получим

$$C=v_0-\frac{mg}{k}.$$

Искомая зависимость v от t имеет вид:

$$v(t)=\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)\cdot e^{-\frac{kt}{m}}+\frac{mg}{k}.$$

Из этой формулы видно, что при достаточно больших t скорость движения тела v мало зависит от начальной скорости v_0.

Задача 3. Лодка под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки, замедляет свое движение от начальной скорости, равной 3м/с, до скорости, равной 1 м/с, за 6 с. Через сколько секунд скорость лодки будет равна 1/9 м/с^2. Какой путь пройдет лодка до остановки?

Решение. Пусть $v=v(t)$ — скорость лодки в момент времени t. По условию задачи, сила, действующая на лодку, пропорциональна скорости лодки и препятствует движению. Поэтому, согласно второму закону Ньютона, получим уравнение

$$m\frac{dv}{dt}=-kv,$$

где m — масса лодки, $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

Это уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, находим общее решение этого уравнения:

$$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Используя начальное условие $v(0) = 3$, найдем $C = 3$, тогда $v=3e^{-\frac{k}{m}t}$. Воспользуемся дополнительным условием задачи $v(6) = 1$:

$$3e^{-\frac{k}{m}t}=1,$$

$$e^{-\frac{k}{m}t}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{k}{m}=\frac{\ln 3}{6}.$$

Скорость лодки определяется формулой

$$v(t)=3e^{-\frac{\ln 3}{6}t}=3\cdot\left(e^{\ln 3}\right)^{-\frac{t}{6}}=3\cdot 3^{-\frac{t}{6}}=3^{1-\frac{t}{6}}.$$

Найдем время T, через которое скорость лодки будет равна 1/9 м/с, из уравнения

$$\frac{1}{9}=3^{1-\frac{T}{6}},$$

$$3^{-2}=3^{1-\frac{T}{6}},$$

$$1-\frac{T}{6}=-2,$$

$$T=18\ c.$$

Путь, пройденный лодкой до остановки, вычислим по формуле

$$S(t)=\int_0^t v(x)dx=\int_0^t 3^{1-\frac{x}{6}}dx=-\frac{6}{\ln 3}\cdot 3^{1-\frac{x}{6}}\Bigg|_0^t=\frac{6}{\ln 3}\cdot\left(3-3^{1-\frac{t}{6}}\right)=\frac{18}{\ln 3}\left(1-3^{-\frac{t}{6}}\right).$$

Из этого равенства следует, что лодка может пройти путь, не больший $\frac{18}{\ln 3}\approx 16{,}4$.

Задача 4. Скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. При температуре воздуха, равной 20 °C, тело в течение 20 мин охлаждается с 100 °C до 60 °C. Через какое время температура тела понизится до 30 °C?

Решение. Используя закон Ньютона, составим дифференциальное уравнение

$$\frac{dT}{dt}=k(T-20),$$

где $T(t)$ — температура тела в момент времени t, k — коэффициент пропорциональности.

Решим это уравнение:

$$\frac{dT}{(T-20)}=k\,dt,$$

$$\int\frac{dT}{(T-20)}=k\int dt,$$

$$T-20=Ce^{\kappa t},$$

$$T=Ce^{\kappa t}+20.$$

Используя дополнительные условия $T(0)=100,\quad T(20)=60$, получим

$$\begin{cases}100=20+C\\60=20+C\,e^{20k}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=80\\40=80e^{20k}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=80\\\frac{1}{2}=e^{20k}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=80\\e^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}\end{cases}.$$

Отсюда имеем

$$T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

Полагая $T = 30$, получим

$$30 = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}},$$

$$80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} = 10,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3},$$

$$\frac{t}{20} = 3,$$

$$t = 60\ \text{мин}.$$

Задача 5. Кривая $y = f(x)$ проходит через точку $M_0(2;\ 3)$. Каждая касательная к этой кривой пересекает прямую $y = 2$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания. Найти кривую $y = f(x)$.

Решение. Пусть $M(x;\ y)$ произвольная точка на искомой кривой. Уравнение касательной к этой кривой в точке M имеет вид:

$$Y - y = y'(x)(X - x),$$

где X, Y — текущие координаты точек касательной.

Из условия задачи известно, что касательная пересекает прямую $y = 2$ в точке с абсциссой $2x$, тогда уравнение касательной примет вид:

$$2 - y = y'(2x - x),$$

$$2 - y = y'x.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$x\frac{dy}{dx} = 2 - y.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\frac{dy}{2-y} = \frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dy}{2-y} = \int\frac{dx}{x},$$

$$-\ln|2-y| = \ln|x| + \ln C,$$

$$y - 2 = \frac{C}{x}$$ — общее решение уравнения.

Так как искомая кривая проходит через точку $M_0(2; 3)$, то $C = 2$. Тогда искомая кривая имеет вид

$$y = 2 + \frac{2}{x} \text{ — гипербола.}$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти кривую, проходящую через очку $M_0(0; –2)$ так, чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной на 3.
2. Найти кривую, проходящую через точку $M_0(1; 1)$ так, чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке был пропорционален квадрату ординаты этой точки.
3. Найти кривую, для которой угловой коэффициент касательной в любой ее точке в 3 раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.
4. Определить кривую, для которой отрезок, отсекаемый на оси ординат нормалью, проведенной в произвольной точке кривой, равен расстоянию этой точки от начала координат.
5. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(1; 2)$ и обладающей тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания в отношении 2:3, считая от оси координат.
6. Найти кривую, проходящую через точку $A(2; 4)$ зная, абсцисса точки пересечения касательной в произвольной точке кривой с осью Ox равна удвоенной абсциссе точки касания.
7. Найти время, за которое вода, заполняющая полусферическую чашу радиуса 1 м, вытечет через круглое отверстие в дне чаши радиусом 0,1 м.
8. Пуля, летящая со скоростью 200 м/с, пробивает доску, толщиной 40 см и вылетает с другой стороны доски со скоростью 80 м/с. За какое время пуля пробила доску, если сопротивление доски движению пули пропорционально скорости доски?
9. Экспериментально установлено, что скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. За какое время количество бактерий увеличится в 100 раз по сравнению с их начальным количеством?
10. Из эксперимента известно, что скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству вещества. Доказать, что период полураспада вещества не зависит от его начального количества.

Ответы

1. $y = e^x - 3$.
2. $k(x-1)y - y + 1 = 0$.

3. $y = Cx^3$.

4. $x^2 = C(2y + C)$ $\left(Уравнению y + \dfrac{x}{y'} = \sqrt{x^2 - y^2} \right)$.

5. $y = 2x^{-\frac{2}{3}}$,

6. $y = \dfrac{8}{x}$.

7. $35{,}2\,c$.

8. $2\ln\dfrac{5}{2}\ c$.

9. $T = \dfrac{\ln 100}{k}$.

10. $T = \dfrac{\ln 2}{k}$.

2. Дифференциальные уравнения высших порядков

Занятие 1. Уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим общий вид уравнения n-го порядка

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

где x — независимая переменная, y — искомая функция.

При интегрировании дифференциальных уравнений n-го порядка иногда удается получить уравнение более низкого порядка, эквивалентное исходному. Оба уравнения будут иметь одни и те же решения, но уравнение более низкого порядка должно содержать уже некоторое число произвольных постоянных. Такие уравнения более низкого порядка часто называют промежуточными интегралами.

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка, то есть уравнения, для которых существуют промежуточные интегралы.

1. Уравнение содержит только производную n-го порядка искомой функции и независимую переменную:

$$y^{(n)} = f(x). \qquad (1)$$

Интегрируя последовательно, получим общее решение уравнения (1) в виде

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Пример. Решить уравнение $y''' = \sin x$.

Решение. Интегрируя трижды исходное уравнение, получим

$$\int y'''dx == \int \sin xdx,$$

$$y'' = -\cos x + C_1,$$

$$\int y''dx = \int (-\cos x + C_1)dx,$$

$$y' = -\sin x + C_1 x + C_2,$$

$$\int y'dx = \int (-\sin x + C_1 x + C_2)dx,$$

$y = \cos x + C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$ — общее решение уравнения.

2. Дифференциальное уравнение не содержит искомой функции и ее производных до (k – 1)-го порядка включительно, то есть уравнение имеет вид:

$$F(x, y^{(\mathrm{k})}, y^{(\mathrm{k}-1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (2)$$

Порядок уравнения может быть понижен до (n – k)-того порядка с помощью подстановки

$$y^{(k)} = p.$$

Подставим в уравнение (2):

$$F(x, p, p', p'', \ldots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Если удается найти общее решение этого уравнения (n – k)-того порядка, содержащее *(n–k)* произвольных постоянных

$$p = \varphi(x, C_1, C_2, \ \ldots \ , C_{n-k}),$$

то, используя подстановку $y^{(k)} = p,\ p = p(x)$, получим уравнение вида

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ \ldots \ , C_{n-k})$$

и задача сводится к первому случаю.

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n.$$

Пример. Решить уравнение $y^{(IV)} - \dfrac{1}{x} y''' = 0$.

Решение. Дифференциальное уравнение относится к виду (2), поэтому используем подстановку $y''' = p$:

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x} p = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln p - \ln C_1 = \ln x,$$

$$\frac{p}{C_1} = x,$$

$$p = C_1 x.$$

Первый промежуточный интеграл имеет вид:

$$y''' = C_1 x.$$

Интегрируя три раза, имеем:

$$y'' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2,$$

$$y' = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3,$$

$y(x) = C_1 \frac{x^4}{24} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$ — общее решение уравнения.

3. Дифференциальное уравнение не содержит независимой переменной, то есть имеет вид:

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (3)$$

Порядок дифференциального уравнения можно понизить с помощью подстановки

$$y' = p,$$

где p — новая неизвестная функция переменной y.

Выразим производные функции y по переменной x через p и производные функции p по переменной y:

$$y' = p,$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{d\left(p\frac{dp}{dy}\right)}{dy}\frac{dy}{dx} = p\left(\left(\frac{dp}{dy}\right) + p\frac{d^2 p}{dy^2}\right)$$

и т. д.

Отсюда видно, что все производные от y по переменной x выражаются через производные от p по переменной y порядков на единицу меньших, поэтому данная подстановка снижает порядок дифференциального уравнения на единицу.

Пример. Решить уравнение $y \cdot y'' - (y')^2 = 0$.

Решение. Дифференциальное уравнение не содержит переменную *x*, поэтому относится к виду (3). Используем подстановку:

$$y' = p \text{, где } p = p(y),\ y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Получили уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0,$$

$$p\left(y\frac{dp}{dy} - p\right) = 0.$$

Отсюда находим *p*:

$$p = 0,\ y' = 0,\ y = C$$

или

$$y\frac{dp}{dy} - p = 0,$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{p}{y},$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y},$$

$$\int\frac{dp}{p} = \int\frac{dy}{y},$$

$$p = C_1 y.$$

Возвращаемся к замене:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y,$$

$$\frac{dy}{y} = C_1 dx,$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int C_1 dx,$$

$$\ln y = C_1 x + \ln C_2,$$

$$\ln y - \ln C_2 = C_1 x,$$

$$\ln\frac{y}{C_2} = C_1 x,$$

$$y = C_2 \cdot e^{C_1 x}.$$

4. Левая часть дифференциального уравнения является точной производной от некоторой функции $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, то есть уравнение имеет вид:

$$\left(\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\right)' = 0 \qquad (4)$$

Отсюда

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C \qquad (5)$$

является первым интегралом уравнения.

Если уравнение (5) в свою очередь является уравнением в точных производных, то можно найти второй интеграл и т. д.

Пример. Решить уравнение $y \cdot y'' + (y')^2 = 0$.

Решение. Можно заметить, что левая часть данного дифференциального уравнения есть производная от функции $y \cdot y'$, следовательно, уравнение можно записать в виде:

$$(y \cdot y')' = 0.$$

Отсюда

$$y \cdot y' = C_1,$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = C_1,$$

$$ydy = C_1 dx,$$

$$\int ydy = C_1 \int dx,$$

$$\frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2,$$

$y^2 = 2C_1 x + 2C_2$ — общее решение уравнения.

Занятие 2. Однородное линейное уравнение

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x), \qquad (1)$$

где $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$, $f(x)$ — заданные непрерывные на интервале (a, b) функции.

Если $f(x)=0$, то уравнение (1) называется однородным; если $f(x)\neq 0$, то — неоднородным. Однородное уравнение имеет вид

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) имеет единственное решение $y=y(x)$, определенное на всем интервале (a,b) и удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \quad x_0\in(a;b) \quad (3)$$

Линейное уравнение особых решений не имеет, всякое его решение является частным решением этого уравнения.

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0. \qquad (2)$$

Это уравнение имеет единственное решение на интервале (a,b), удовлетворяющее начальным условиям **(3)**. Если начальные условия нулевые, то уравнение **(2)** имеет только нулевое решение.

Если функции $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ являются решениями уравнения (2), то их линейная комбинация

$$C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)+\ldots+C_n\cdot y_n(x),$$

где $C_1,C_2,\ldots,C_n$ — произвольные постоянные, также является решением уравнения (2).

Рассмотрим понятие линейной зависимости и линейной независимости системы функций.

Определение. Функции $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ называются линейно зависимыми на интервале (a,b), если одна из функций системы является линейной комбинацией других для всех $x\in(a,b)$.

Таким образом, функции $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ называются линейно зависимыми на интервале (a,b), если существуют числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, из которых хотя бы одно не равно нулю, такие, что

$$\alpha_1\cdot y_1(x)+\alpha_2\cdot y_2(x)+\ldots+\alpha_n\cdot y_n(x)=0, \quad x\in(a;b) \qquad (4)$$

<u>Определение.</u> Функции $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ называются линейно независимыми на интервале (a,b), если равенство (4) выполняется лишь в том случае, когда все $\alpha_к=0$.

<u>Определение.</u> Фундаментальной системой решений однородного линейного уравнения (2) с непрерывными на интервале (a,b) коэффи-

циентами называется система из n линейно независимых на интервале (a, b) решений $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ этого уравнения.

Для того чтобы решить уравнение (2), нужно найти его фундаментальную систему решений. Если найдена фундаментальная система решений $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ однородного уравнения (2), то функция

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + ... + C_n \cdot y_n(x), \qquad (5)$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ — произвольные постоянные, есть общее решение этого уравнения.

Можно показать, что всякое решение уравнения (2) на интервале (a, b) содержится в решении (5) при конкретных значениях $C_к$.

Чтобы система решений $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы определитель вида

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке из интервала (a, b). Определитель был введен в математику польским ученым Ю. Вронским (1776—1853 гг.) и называется определителем Вронского или вронскианом.

Примеры

1. Функции $y_1 = 1$ и $y_2 = x$ линейно независимы на любом интервале (a, b), так как определитель Вронского $W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

2. Покажем, что функции $e^{\kappa_1 x}$ и $e^{\kappa_2 x}$ линейно независимы на любом интервале (a, b), если k_1 и k_2 — различные действительные числа. Для этого покажем, что их определитель Вронского $W(x) \neq 0$ для любых $x \in (a, b)$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1 + k_2)x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = (k_2 - k_1) \cdot e^{(k_1 + k_2)x} \neq 0 .$$

3. Функции $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$ $(\beta \neq 0)$ линейно независимы на любом интервале (a, b), так как их определитель Вронского отличен от нуля:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x) \end{vmatrix}=$$

$$=e^{2\alpha x}\cdot\begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x \end{vmatrix}=$$

$$=\beta\cdot e^{2\alpha x}\neq 0.$$

4. Функции $e^{\kappa x}$ и $xe^{\kappa x}$ линейно независимы на любом интервале (a, b), так как линейная независимость функций *1* и x показаны в примере 1, и имеем

$$\alpha_1 e^{\kappa x}+\alpha_2 e^{kx}=e^{kx}(\alpha_1+\alpha_2 x),\quad e^{kx}\neq 0.$$

Теорема (о структуре общего решения линейного однородного уравнения).

Если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независимые на интервале (a, b) решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (2) с непрерывными коэффициентами, то функция

$$y(x)=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)+\ldots+C_n\cdot y_n(x),\ x\in(a, b),$$

где C_κ — произвольные постоянные, является общим решением уравнения (2).

Задания для самостоятельного решения

1. Доказать, что функции e^x, xe^x, x^2e^x линейно независимы при любых x.

2. Найти определитель Вронского системы функций $5, \cos^2 x, \sin^2 x, x\in R$. Являются ли эти функции линейно независимыми?

3. Составить однородное линейное дифференциальное уравнение, если задана его фундаментальная система решений:

   a) $y_1=e^{-x}, y_2=e^x$;

   b) $y_1=e^{-3x}, y_2=xe^{-3x}$;

   c) $y_1=\cos 2x, y_2=\sin 2x$.

4. Доказать, что функция $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-5x}$ является общим решением дифференциального уравнения $y''+3y'-10y=0$.

5. Найти фундаментальную систему решений уравнения $y''+y=0$.

Ответы

2. $W(x)=0$.

3.

$y''-y=0$,

$y''+6y'+9y=0$,

$y''+4y=0$.

5. $y_1=\cos x, y_2=\sin x$.

Занятие 3. Неоднородное линейное уравнение

Рассмотрим неоднородное линейное дифференциальное уравнение

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \qquad (1)$$

и соответствующее ему однородное уравнение

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 \qquad (2).$$

Теорема (о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения).

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (1) является суммой общего решения соответствующего линейного однородного уравнения (2) и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения (1).

Замечание. Если правая часть неоднородного уравнения (1) состоит из нескольких слагаемых и для неоднородных уравнений с той же левой частью, равной каждому из этих слагаемых в отдельности, можно найти частное решение, то сумма этих частных решений будет частным решением всего уравнения (1).

В общем случае, нахождение частного решения линейного неоднородного уравнения представляет большие трудности, поэтому рассмотрим метод нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения, если известны фундаментальные решения соответствующего однородного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного уравнения (2), а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Тогда общее решение линейного однородного уравнения (2) имеет вид:

$$y(x)=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)+\ldots+C_n\cdot y_n(x). \qquad (6)$$

Основная идея метода состоит в том, что решение линейного неоднородного уравнения (1) ищем в виде:

$$z(x)=C_1(x)\cdot y_1(x)+C_2(x)\cdot y_2(x)+\ldots+C_n(x)\cdot y_n(x), \qquad (7)$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции. Эти функции находят из следующей системы:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 + \quad \ldots \quad + C_n'(x)\cdot y_n = 0 \\ C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' + \quad \ldots \quad + C_n'(x)\cdot y_n' = 0 \\ ------------------------- \\ C_1'(x)\cdot y_1^{(n-2)} + C_2'(x)\cdot y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)\cdot y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)\cdot y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\cdot y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\cdot y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \qquad (8)$$

Определитель этой системы является определителем Вронского для фундаментальной системы функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ и поэтому отличен от нуля. Система (8) однозначно разрешима относительно неизвестных функций $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$.

Найдем и сами функции $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ в виде:

$$C_1(x) = \int C_1'(x)dx + A_1,$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x)dx + A_2,$$

$$-------------$$

$$C_n(x) = \int C_n'(x)dx + A_n,$$

где A_1, A_2, …, A_n — произвольные постоянные.

Подставляя эти значения $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$ в формулу (7), получим общее решение неоднородного уравнения (1).

Пример 1. Решить уравнение $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$.

Решение. Составим соответствующее однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Ниже покажем, что фундаментальная система решений этого уравнения имеет вид:

$$y_1 = e^{-2x},\ y_2 = xe^{-2x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y(x) = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)xe^{-2x}.$$

Функции $C_1'(x), C_2'(x)$ найдем из системы (см (8)):

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot e^{-2x} + C_2'(x)\cdot xe^{-2x} = 0 \\ -2C_1'(x)\cdot e^{-2x} + C_2'(x)\cdot (1-2x)e^{-2x} = e^{-2x} \end{cases}.$$

Отсюда $C_1'(x) = -x; C_2'(x) = 1$.

Интегрируя, получим

$$C_1(x) = -\frac{x^2}{2} + A_1;\ C_2(x) = x + A_2.$$

Тогда

$y(x) = A_1 e^{-2x} + A_2 x e^{-2x} + \frac{x^2}{2} e^{-2x}$ — общее решение неоднородного уравнения.

3. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами

Занятие 4. Однородное уравнение

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (1),$$

где коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — действительные числа. Это уравнение имеет фундаментальную систему решений, которая состоит из степенных, показательных и тригонометрических функций.

Общее решение уравнения (1) будем искать в виде

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — некоторые постоянные, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений уравнения (1).

Для построения фундаментальной системы решений будем использовать метод Эйлера. Для этого частное решение уравнения (1) ищется в виде

$$y = e^{kx}, \qquad (2)$$

где k — некоторое число (действительное или комплексное), которое требуется найти.

Подставим (2) в уравнение (1):

$$\left(\kappa^n + a_1 \kappa^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\kappa + a_n\right) \cdot e^{\kappa x} = 0.$$

Сокращая на $e^{\kappa x}$, получим:

$$\kappa^n + a_1 \kappa^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\kappa + a_n = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) называется характеристическим уравнением, его корни называются характеристическими числами.

Вид общего решения уравнения (1) зависит от корней характеристического уравнения (3).

Возможны три случая:

1. Все корни характеристического уравнения $k_1, k_2, ..., k_n$ — действительны и различны.

Фундаментальной системой решений будут функции

$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x},\ ...,\ y_n = e^{k_n x}$.

Общее решение имеет вид:

$y = C_1 e^{\kappa_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + ... + C_n e^{k_n x}$.

2. Все корни характеристического уравнения $k_1, k_2, ..., k_n$ — различны, но среди них имеются комплексные.

Пусть $k_1 = a - bi,\quad k_2 = a + bi$ — комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения. Этим корням соответствуют два линейно независимых частных решения:

$$y_1 = e^{ax}\cos bx, \quad y_2 = e^{ax}\sin bx.$$

Чтобы получить фундаментальную систему решений, выпишем линейно-независимые частные решения, соответствующие другим сопряженным парам комплексных корней и всем действительным корням характеристического уравнения. Общее решение уравнения (1) есть линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами. При этом корням $k_1 = a - bi,\quad k_2 = a + bi$ в формуле общего решения соответствует выражение вида

$$e^{ax}\left(C_1\cos bx + C_2\sin bx\right).$$

3. Среди корней характеристического уравнения имеются кратные (эти корни могут быть действительными и комплексными)

Пусть k_1 — действительный корень уравнения (3) кратности m, тогда ему соответствует m линейно-независимых частных решений вида

$$e^{k_1 x},\ xe^{k_1 x},\ x^2 e^{k_1 x},\ \dots\ ,\ x^{m-1}e^{k_1 x},$$

а в формуле общего решения — выражение вида

$$e^{k_1 x}\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + ... + C_m x^{m-1}\right).$$

Если $k_1 = a - bi,\quad k_2 = a + bi$ — комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения кратности m, то им соответствуют $2m$ линейно-независимых частных решения вида:

$$\begin{cases} e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx, \dots,\ x^{m-1}e^{ax}\cos bx \\ e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx, \dots,\ x^{m-1}e^{ax}\sin bx \end{cases}$$

В формуле общего решения этим корням соответствуют выражения вида

$$e^{ax}\left(\left(C_1 + C_2 x + ... + C_m x^{m-1}\right)\cos bx + \left(C_{m+1} + C_{m+2}x + ... + C_{2m}x^{m-1}\right)\sin bx\right).$$

Линейная комбинация линейно-независимых частных решений указанного выше вида, соответствующих всем простым и кратным действительным и комплексным корням дает общее решение уравнения (1).

Пример 1. Решить уравнение $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0.$$

Решим это уравнение:

$$k^2(k-2) - (k-2) = 0,$$
$$(k-2)(k^2 - 1) = 0,$$
$$(k-2)(k-1)(k+1) = 0,$$
$$k_1 = -1; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = 2.$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}.$$

Пример 2. Решить уравнение $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^3 - 2k^2 + 4k - 8 = 0$$
$$k^2(k-2) + 4(k-2) = 0,$$
$$(k-2)(k^2 + 4) = 0,$$
$$k_1 = 2; \quad k_{2,3} = \pm 2\imath$$

.

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

Пример 3. Решить уравнение $y^{(6)} - 4y^{(5)} + 8y^{(4)} - 8y''' + 4y'' = 0$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^6 - 4k^5 + 8k^4 - 8k^3 + 4k^2 = 0$$
$$k^2(k^4 - 4k^3 + 8k^2 - 8k + 4) = 0,$$
$$k^2(k^4 + 4k^2 + 4 - 4k^3 + 4k^2 - 8k) = 0,$$
$$k^2(k^2 - 2k + 2)^2 = 0,$$
$$k_1 = k_2 = 0; \quad k_3 = k_4 = 1 + \imath; \quad k_5 = k_6 = 1 - \imath.$$

Фундаментальная система решений уравнения имеет вид:

$$1,\ x,\ e^x \cos x,\ e^x \sin x,\ \ xe^x \cos x,\ xe^x \sin x.$$

Отсюда получим общее решение уравнения

$$y = C_1 + C_2 x + e^x\left(C_3 \cos x + C_4 \sin x + C_5 x \cos x + C_6 x \sin x\right).$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1. $y'' - 64y = 0.$
2. $y^{(4)} - y''' = 0.$
3. $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0.$
4. $y'' + 4y' + 5y = 0.$
5. $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0.$
6. $y''' - 4y'' - 5y' = 0.$
7. $y''' - y' = 0.$
8. $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0.$
9. $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 3y''' + y'' = 0.$
10. $y''' - 8y = 0.$
11. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0.$
12. $y^{(4)} - 16y = 0.$

2. Решить задачу Коши:

13. $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$
14. $y''' + y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2.$
15. $y''' + y'' - y' - y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 3.$

Ответы

1.

1. $y = C_1 e^{8x} + C_2 e^{-8x}$.
2. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-x}$.
3. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$.
4. $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.
5. $y = (C_1 + C_2 x)\cos\sqrt{2}x + (C_3 + C_4 x)\sin\sqrt{2}x$.
6. $y = C_1 + C_2 e^{5x} + C_3 e^{-x}$.
7. $y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}$.
8. $y = e^{x}(C_1 + C_2 x) + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.
9. $y = C_1 + C_2 x + e^{-x}(C_3 + C_4 x + C_5 x^2)$.
10. $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos\sqrt{3}x + C_3 \sin\sqrt{3}x)$.

11. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}$.

12. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$.

2.

13. $y = 2e^{2x} - e^{3x}$.

14. $y = e^{-x} - \cos x + 2\sin x$.

15. $y = (1 + 2x)e^{-x} - e^{x}$.

Занятие 5. Неоднородное уравнение

Пусть дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \qquad (4)$$

где $f(x)$ — непрерывная на интервале (a, b) функция.

Для соответствующего однородного дифференциального уравнения всегда можно найти фундаментальную систему решений, поэтому уравнение (4) может быть решено с помощью метода вариации произвольных постоянных (метода Лагранжа). На практике этим методом пользоваться не всегда удобно. В некоторых случаях для неоднородного уравнения (4) удается найти частное решение методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим эти случаи и укажем соответствующие им виды частных решений.

1. Функция $f(x) = P(x)$, где $P(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$ — многочлен степени m (в частности, он может быть постоянным числом, отличным от нуля). Возможны два случая:

a) если число 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (4) ищем в виде

$$\bar{y} = Q(x),$$

где *Q(x)* — многочлен той же степени, что и *P(x)*, но с неопределенными коэффициентами;

b) если число 0 является корнем характеристического уравнения кратности m, то частное решение уравнения (4) ищем в виде

$$\bar{y} = x^mQ(x).$$

2. Функция $f(x) = P(x)e^{ax}$, где a — некоторое число.

Возможны два случая:

a) если число a не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (4) имеет вид:

$$\bar{y} = e^{ax}Q(x);$$

b) если число a является корнем характеристического уравнения кратности m, то частное решение уравнения (4) имеет вид:

$$\bar{y} = x^m e^{ax} Q(x).$$

3. Функция $f(x)$ имеет вид $f(x) = e^{ax}\left(P_1(x)\cos bx + P_2(x)\sin bx\right)$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — многочлены соответственно (в частности, они могут быть постоянными числами и один из них может быть нулем).

Пусть число r — наивысшая степень многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$.

Возможны два случая:

а) если число $a + bi$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения (4) имеет вид:

$$\bar{y} = e^{ax}\left[Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx\right],$$

где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ — многочлены степени r с неопределенными коэффициентами;

b) если число $a + bi$ является корнем характеристического уравнения кратности m, то частное решение уравнения (4) имеет вид:

$$\bar{y} = x^m e^{ax}\left[Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx\right].$$

Заметим, что если правая часть уравнения является комбинацией выражений рассмотренного выше вида, то решение находится как комбинация решений вспомогательных уравнений, каждое из которых имеет правую часть, соответствующую выражению, входящему в комбинацию.

То есть если уравнение имеет вид:

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f_1(x) + f_2(x),$$

то частное решение этого уравнения будет $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$, где $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ — частные решения вспомогательных уравнений $L(y) = f_1(x)$ и $L(y) = f_2(x)$.

4. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка находят широкое применение в различных приложениях, например, в физике при изучении колебательных процессов. Поэтому остановимся на этом виде уравнений подробнее.

Занятие 6. Однородные уравнения

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (1)$$

где p, q — некоторые действительные числа.

Для отыскания общего решения уравнения (1) нужно найти два его линейно независимых решения. Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$y = e^{kx}, \tag{2}$$

где k — постоянная, которую нужно найти.

Подставим (2) в уравнение (1):

$$y' = ke^{kx}; \qquad y'' = k^2 e^{kx},$$

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0,$$

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) называется характеристическим уравнением для уравнения (1).

При решении характеристического уравнения возможны три случая (в зависимости от знака дискриминанта D квадратного уравнения.

1. Корни характеристического уравнения k_1 и k_2 — действительны и различны ($D > 0$).

В этом случае получаем два линейно независимых частных решения:

$$y_1 = e^{k_1 x}; \qquad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2. Корни характеристического уравнения $k_1 = k_2 = k$ — действительные и равны ($D = 0$).

В этом случае получаем только одно частное решение: $y_1 = e^{kx}$. Нетрудно показать, что решением уравнения (1) будет и функция $y_2 = xe^{kx}$. Ранее показано, что функции $y = e^{kx}$ и $y = xe^{kx}$ линейно независимы. Следовательно, общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 xe^{kx} \text{ или}$$

$$y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right).$$

3. Корни характеристического уравнения $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$ — комплексные сопряженные.

Общее решение уравнения (1) в этом случае имеет вид

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right).$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - 4k + 4 = 0; \qquad k_1 = k_2 = 2.$$

Так как корни уравнения действительные и равны, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{2x}$$

Пример 2. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 + 2k + 5 = 0; \qquad D = -16; \qquad k_1 = -1 + 2i; \qquad k_2 = -1 - 2i.$$

Так как корни уравнения являются комплексными числами, то общее решение имеет вид:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Пример 3. Решить уравнение $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - 7k + 6 = 0; \; k_1 = 1; \quad k_2 = 6.$$

Так как корни уравнения действительные и различны, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x}.$$

Пример 4. Решить уравнение $y'' - y' - 2y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - k - 2 = 0; \qquad k_1 = -1; \quad k_2 = 2;$$

Так как корни уравнения действительные и различны, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Пример 5. Решить уравнение $y'' - 9y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение:

$$k^2 - 9 = 0; \; k_1 = 3; \qquad k_2 = -3.$$

Так как корни уравнения действительные и различны, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}.$$

Пример 6. Решить уравнение

$$y'' + 2y' + 10y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2+2k+10=0; \quad D=4-40=-36=36\imath^2,\ k_1=\frac{-2+6\imath}{2}=-1+3i,$$

$$k_2=\frac{-2-6\imath}{2}=-1-3i.$$

Данное уравнение не имеет вещественных корней. В этом случае общее решение соответствующего дифференциального уравнения записывается в виде

$$y=C_1e^{-x}\cos 3x+C_2e^{-x}\sin 3x.$$

Вычислим производную данной функции:

$$y'=-C_1e^{-x}\cos 3x-3C_1e^{-x}\sin 3x-C_2e^{-x}\sin 3x+3C_2e^{-x}\cos 3x$$

Для нахождения значений C_1 и C_2, воспользуемся начальными условиями. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1e^{-\frac{\pi}{2}}\cos\frac{3\pi}{2}+C_2e^{-\frac{\pi}{2}}\sin\frac{3\pi}{2}=0 \\ -C_1e^{-\frac{\pi}{2}}\cos\frac{3\pi}{2}-3C_1e^{-\frac{\pi}{2}}\sin\frac{3\pi}{2}-C_2e^{-\frac{\pi}{2}}\sin\frac{3\pi}{2}+3C_2e^{-\frac{\pi}{2}}\cos\frac{3\pi}{2}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_2e^{-\frac{\pi}{2}}=0 \\ 3C_1e^{-\frac{\pi}{2}}+C_2e^{-\frac{\pi}{2}}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2=0 \\ 3C_1e^{-\frac{\pi}{2}}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2=0 \\ C_1=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3} \end{cases}$$

Искомое решение приобретает вид: $y=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}e^{-x}\cos 3x$.

Занятие 7. Неоднородные уравнения

Пусть дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''+py'+qy=f(x), \qquad (4)$$

где p, q — постоянные действительные числа.

Чтобы найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения, нужно выполнить следующие действия:

1) найти общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения;

2) найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения;

3) написать общее решение неоднородного дифференциального уравнения в виде суммы общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения.

Частное решение уравнения (4) можно найти методом вариации произвольных постоянных. Однако, на практике этим методом пользоваться не всегда удобно. Если в правой части уравнения (4) стоит многочлен, показательная функция, тригонометрические функции синус или косинус, произведение их или линейные комбинации, то для отыскания частного решения применяют метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим три случая.

1. Правая часть уравнения (4) есть многочлен *n*-степени $f(x) = P(x)$:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0 \cdot$$

В этом случае частное решение $\bar{y}$ неоднородного уравнения ищут также в виде многочлена. В зависимости от коэффициентов p и q уравнения (4) частное решение нужно искать в виде:

Если $q \neq 0$, то $\bar{y} = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$
Если $q = 0,\ p \neq 0$, то $\bar{y} = x\left(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n\right)$
Если $q = 0,\ p = 0$, то $\bar{y} = x^2\left(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n\right)$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$, нужно подставить $\bar{y}$ в уравнение (4) вместо неизвестной функции. В левой части уравнения (4), как и в правой части, получится многочлен, коэффициентами которого являются линейные комбинации коэффициентов $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$. Приравнивая коэффициенты при x в одинаковых степенях в левой и правой части равенства, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$. Решая систему, найдем эти коэффициенты и запишем частное решение уравнения (4).

Пример 1. $y'' - 4y' = x$.

Решение. Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения: $y'' - 4y' = 0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k = 0$$
$$k(k-4) = 0$$
$$k_1 = 0, k_2 = 4$$

Так как корни характеристического уравнения действительные и не равные, то общее решение однородного уравнения записывается в виде:

$$y^* = C_1 e^{0x} + C_2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

Теперь найдем частное решение исходного неоднородного уравнения. В правой части уравнения стоит многочлен первой степени $P(x) = x$. Так как $p = -4, q = 0$, то частное решение будем искать в виде

$$\bar{y} = x\,(Ax + B) \text{ или}$$

$$\bar{y} = Ax^2 + Bx \;.$$

Определим неизвестные коэффициенты A и B. Вычислим первую и вторую производные и подставим их в исходное неоднородное дифференциальное уравнение.

$$\bar{y}' = 2Ax + B; \quad \bar{y}'' = 2A.$$
$$2A - 8Ax - 4B = x.$$

Составим систему: $\begin{cases} -8A = 1 \\ 2A - 4B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{8} \\ B = -\dfrac{1}{16} \end{cases}.$

Итак, частное решение: $\bar{y} = -\dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{16}x$. Тогда общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x.$$

2. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения (4) имеет вид $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ — многочлен n-степени.

При выборе частного решения в этом случае удобно пользоваться следующими указаниями:

1) Если α не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид: $\bar{y}(x) = e^{\alpha x}\left(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n\right).$
2) Если α является простым корнем характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид: $\bar{y}(x) = e^{\alpha x} \cdot x\left(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n\right).$

3) Если α является кратным корнем характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид:

$$\bar{y}(x) = e^{\alpha x} \cdot x^2 \left(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n\right).$$

Пример 2. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{-x}$.

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - 5k + 6 = 0, \quad D = 25 - 24 = 1, \quad k_1 = \frac{5+1}{2} = 3, \quad k_2 = \frac{5-1}{2} = 2.$$

Так как корни характеристического уравнения действительны и различны, то общее решение однородного уравнения записывается в виде:

$$y^* = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}.$$

Теперь найдем частное решение исходного неоднородного уравнения. Правая часть данного неоднородного уравнения относится к случаю 2:

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}, \quad f(x) = 2x \cdot e^{-x},$$

следовательно, $P_n(x) = 2x, \quad \alpha = -1$.

Так как $\alpha = -1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид:

$$\bar{y}(x) = e^{-x}(Ax + B).$$

Найдем производные первого и второго порядка данной функции:

$$\bar{y}'(x) = A \cdot e^{-x} - (Ax + B) \cdot e^{-x},$$

$$\bar{y}''(x) = -A \cdot e^{-x} - A \cdot e^{-x} + (Ax + B) \cdot e^{-x}$$

Подставим $\overline{y}'(x), \quad \overline{y}''(x), \quad \bar{y}(x)$ в исходное уравнение и получим:

$$-A \cdot e^{-x} - A \cdot e^{-x} + (Ax + B) \cdot e^{-x} - 5\left(A \cdot e^{-x} - (Ax + B) \cdot e^{-x}\right) + 6\left(e^{-x}(Ax + B)\right) = 2x \cdot e^{-x}.$$

Разделим обе части уравнения на $e^{-x} \neq 0$:

$$-A - A + Ax + B - 5A + 5Ax + 5B + 6Ax + 6B = 2x,$$

$$12Ax - 7A + 12B = 2x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях и получим систему:

$$\begin{cases} 12A = 2 \\ -7A + 12B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{6} \\ B = \dfrac{7}{72} \end{cases}$$

Таким образом, получаем: $\bar{y}(x) = \left(\dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{72}\right) \cdot e^{-x}$.

Следовательно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = y^*(x) + \bar{y}(x), \text{ то есть}$$

$$y(x) = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{2x} + \left(\dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{72}\right) \cdot e^{-x}.$$

3. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения (4) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$$

где $P_n(x)$ — многочлен *n*-степени от *x*, $Q_m(x)$ — многочлен *m*-степени от *x*.

Для нахождения частного решения удобно пользоваться следующими рекомендациями:

Из коэффициентов α и β составляем числа вида $\alpha \pm i\beta$.

1) Если $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид: $$\bar{y} = e^{\alpha x}\left(S_k(x)\cos\beta x + N_k(x)\sin\beta x\right).$$
2) Если $\alpha \pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид: $$\bar{y} = xe^{\alpha x}\left(S_k(x)\cos\beta x + N_k(x)\sin\beta x\right).$$

$S_k(x), N_k(x)$ — многочлены степени k от *x*, где $k = \max\{m, n\}$.

Замечание. Если в выражении для $f(x)$ $P_n(x) \equiv 0 \left(Q_m(x) \equiv 0\right)$, то частное решение все равно ищут по указанным выше формулам.

Пример 3. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 16y = 7\cos 3x$. Найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$.

Решение. Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$y'' + 16y = 0$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 16 = 0$$

$$k^2 - 16i^2 = 0$$

$$(k - 4i)(k + 4i) = 0$$

$$k_1 = 4i,\ k_2 = -4i.$$

Так как корни характеристического уравнения комплексные, то общее решение однородного уравнения записывается в виде:

$$y^* = e^{0x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x.$$

Найдем частное решение исходного неоднородного уравнения. Правая часть данного неоднородного уравнения относится к случаю 3.

В общем виде

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x).$$

По условию

$$f(x) = 7\cos 3x,$$

то есть $P_n(x) = 7\ (n = 0),\ Q_m(x) \equiv 0,\ \alpha = 0,\ \beta = 3.$

Так как числа $\alpha \pm i\beta = \pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, $k = 0$, то частное решение имеет вид:

$$\bar{y} = A\cos 3x + B\sin 3x$$

Найдем производные первого и второго порядка этой функции:

$$(\bar{y})' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$$

$$(\bar{y})'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$$

Подставим $\bar{y}, (\bar{y})', (\bar{y})''$ в исходное уравнение и преобразуем это выражение.

Получим:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 16A\cos 3x + 16B\sin 3x = 7\cos 3x$$

$$7A\cos 3x + 7B\sin 3x = 7\cos 3x$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 7A = 7 \\ 7B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$$

Таким образом, получаем: $\bar{y} = \cos 3x$

Общее решение имеет вид: $y = y^* + \bar{y} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + \cos 3x$.

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0)=1,\quad y'(0)=4$:

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + \cos 3x,$$

$$y' = -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x - 3\sin 3x.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 \cos 0x + C_2 \sin 0x + \cos 0x = 1 \\ -4C_1 \sin 0x + 4C_2 \cos 0x - 3\sin 0x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 1 \\ 4C_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Таким образом, $y = -\cos 4x + \sin 4x + \cos 3x$ — частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Пример 4. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + y = \cos 2x + \sin x$. Найти общее решение уравнения.

Решение. Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$y'' + y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 1 = 0,$$

$$k^2 - i^2 = 0,$$

$$(k-i)(k+i) = 0,$$

$$k_1 = i,\ k_2 = -i.$$

Так как корни характеристического уравнения комплексные, то общее решение однородного уравнения записывается в виде:

$$y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Частное решение однородного уравнения будем искать в виде

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2,$$

где $\bar{y}_1$ — частное решение уравнения $y'' + y = \cos 2x$, $\bar{y}_2$ — частное решение уравнения $y'' + y = \sin x$.

Рассмотрим отдельно эти уравнения.

1) $y'' + y = \cos 2x$.

Так как числа $\alpha \pm i\beta = \pm 2i$ $(\alpha = 0, \beta = 2)$ не являются корнями характеристического уравнения, $k = 0$, то частное решение имеет вид:

$$\bar{y}_1 = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Найдем производные первого и второго порядка этой функции:

$$(\bar{y}_1)' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$

$$(\bar{y}_1)'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Подставим $\bar{y}_1, (\bar{y}_1)', (\bar{y}_1)''$ в исходное уравнение и преобразуем это выражение.

Получим:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x = \cos 2x,$$
$$-3A\cos 2x - 2B\sin 2x = \cos 2x.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} -3A = 1 \\ -2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, частное решение уравнения $y'' + y = \cos 2x$ имеет вид: $\bar{y}_1 = -\dfrac{1}{3}\cos 2x$.

2) $y'' + y = \sin x$.

Так как числа $\alpha \pm i\beta = \pm i$ $(\alpha = 0,\ \beta = 1)$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение имеет вид:

$$\bar{y}_2 = x(A\cos x + B\sin x).$$

Найдем производные первого и второго порядка этой функции:

$$\bar{y}_2{}' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x),$$
$$\bar{y}_2{}'' = -2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x).$$

Подставим $\bar{y}, (\bar{y})', (\bar{y})''$ в исходное уравнение и преобразуем это выражение.

Получим:

$$-2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x) + x(A\cos x + B\sin x) = \sin x,$$
$$-2A\sin x + 2B\cos x - Ax\cos x - Bx\sin x + Ax\cos x + Bx\sin x = \sin x.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, частное решение уравнения $y'' + y = \sin x$ имеет вид: $\bar{y}_2 = -\dfrac{1}{2}x\cos x$.

Тогда частное решение исходного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\bar{y} = -\frac{1}{3}\cos 2x - \frac{1}{2}x\cos x.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения:

$$y = y^* + \bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3}\cos 2x - \frac{1}{2} x \cos x \cdot$$

Задания для самостоятельного решения

1. Решить однородные линейные дифференциальные уравнения:

1. $y'' - 7y' + 12y = 0$.
2. $y'' + y = 0$.
3. $y'' - y = 0$.
4. $y'' - y' = 0$.
5. $y'' = 9y$.
6. $y'' - 6y' + 8y = 0$.
7. $y'' + 3y' + 2y = 0$.
8. $y'' - 2y' = 0$.
9. $y'' + 16y = 0$.
10. $y'' + 6y' + 10y = 0$.

2. Решить задачу Коши:

11. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.
12. $y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 8$.
13. $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -1$.
14. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 4$.

3**.** Решить неоднородные линейные дифференциальные уравнения методом неопределенных коэффициентов:

15. $y'' - 2y' + y = 4e^x$.
16. $y'' + 2y' + y = 3x^2 + x - 4$.
17. $y'' - y = 8xe^x$.
18. $y'' + 2y' + y = x^2 \sin x$.
19. $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$.
20. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$.
21. $y'' - 4y' = 2x^2 - 5x + 1$.
22. $y'' - 2y' + y = \dfrac{1-x}{e^x}$.
23. $y'' + y + 4x\sin x = 0$.
24. $y'' + y' = x + e^x$.
25. $y'' - 3y' = 6x + 1 + e^{3x}$.
26. $y'' + 9y = \cos 3x + 3$.

27. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$.

28. $y'' - 2y' + 5y = e^{x}\sin x$.

29. $y'' - y = \cos^2 x$.

30. $y'' + y = \sin x \cos 3x$.

4. Решить задачи Коши:

31. $y'' - 2y' = e^{x}\left(x^2 + x - 3\right), \quad y(0) = y'(0) = 2$.

32. $y'' + y = \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

33. $y'' + y = 6\cos x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$.

34. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x}{e^{x}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

5. Решить неоднородные линейные дифференциальные уравнения методом вариации произвольных постоянных:

35. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{x}$.

36. $y'' + y = tgx$.

37. $y'' + 9y = tg3x$.

38. $y'' + y = 2ctgx$.

39. $y'' - y = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

40. $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$.

Ответы

1. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$.
2. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.
3. $y = (C_1 + C_2 x)e^{x}$.
4. $y = C_1 + C_2 e^{x}$.
5. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$.
6. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$.
7. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.
8. $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.
9. $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$.
10. $y = e^{-3x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$.

11. $y = 2xe^{3x}$.

12. $y = e^{2x}(\cos 3x + 2\sin 3x)$.

13. $y = (3 + 2x)\,e^{-x}$.

14. $y = -\cos x + 2\sin x$.

15. $y = e^{x}(C_1 + C_2x) + 2x^2e^{x}$.

16. $y = e^{-x}(C_1 + C_2x) + 3x^2 - 11x + 12$.

17. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + e^{x}\left(2x^2 - 2x\right)$.

18. $y = e^{-x}(C_1 + C_2x) + \left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right)\cos x + \left(x - \frac{3}{2}\right)\sin x$.

19. $y = x^3 + x + C_1 + C_2e^{4x}$.

20. $y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + x^2 - 8x + 7$.

21. $y = C_1 + C_2e^{4x} + x\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$.

22. $y = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x + e^{x}\right)$.

23. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x^2\cos x - x\sin x$.

24. $y = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x + e^{x}\right)$.

25. $y = C_1 + C_2e^{3x} - x^2 - x + \frac{1}{3}xe^{3x}$.

26. $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - \frac{1}{6}x\sin 3x + \frac{1}{3}$.

27. $y = \frac{1}{3}xe^{3x} + 3x^2 + 2x + C_1 + C_2e^{3x}$.

28. $y = e^{x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{1}{3}e^{x}\sin 3x$,

29. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\cos 2x$.

30. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{30}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 2x$.

31. $y = \left(1 - x - x^2\right)e^{x} + e^{2x}$.

32. $y = \cos x + \frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$.

33. $y = 2\cos x - 3\sin x + 3x\sin x$.

34. $y = 2e^{-x} - 2e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^x$.

35. $y = (C_1 + C_2 x)e^x - xe^x + xe^x \ln|x|$.

36. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|$.

37. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{18}\cos 3x \cdot \ln\left|\frac{\sin 3x - 1}{\sin 3x + 1}\right|$,

38. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \cdot \ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right|$.

39. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 4\sqrt{x}$.

40. $y = e^x (C_1 + C_2 x) + \frac{1}{x}$.

Контрольная работа 2 «Уравнения высших порядков»

Вариант 1

1. Решить уравнение, понизив порядок: $(y'')^2 = 4(y' - 1)$.
2. Решить уравнение методом неопределенных коэффициентов: $y'' - y' = e^x + e^{2x} + x$.
3. Решить уравнение методом вариации произвольных постоянных: $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

Вариант 2

1. Решить уравнение, понизив порядок: $x \ln x \cdot y'' - y' = 0$.
2. Решить уравнение методом неопределенных коэффициентов: $y'' + y = \sin x + \cos 2x$.
3. Решить уравнение методом вариации произвольных постоянных: $y'' - y' = \frac{2 - x}{x^3} e^x$.

Вариант 3

1. Решить уравнение, понизив порядок: $2y \cdot y'' + (y')^2 + (y')^4 = 0$.
2. Решить уравнение методом неопределенных коэффициентов: $y'' + y = \cos x + \cos 2x$.
3. Решить уравнение методом вариации произвольных постоянных: $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$.

Вариант 4

1. Решить уравнение, понизив порядок: $2(y')^2 = (y-1)y''$.

2. Решить уравнение методом неопределенных коэффициентов: $y'' + y = 2\sin x + 4x\cos x$.

3. Решить уравнение методом вариации произвольных постоянных: $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$.

Занятие 8. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{cases} \qquad (1)$$

где коэффициенты a_{ij} — некоторые действительные числа, x — аргумент, $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ — искомые функции.

Система (1) называется *системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*.

Рассмотрим метод Эйлера, который позволяет найти решение системы (1), не сводя ее к уравнению n-го порядка.

Решение системы будем искать в виде

$y_1 = \gamma_1 e^{\kappa x}, y_2 = \gamma_2 e^{\kappa x}, \ldots, y_n = \gamma_n e^{\kappa x}$, где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \kappa$ — некоторые постоянные.

Подставив эти функции в систему (1) и поделив на $e^{\kappa x}$, получим систему уравнений относительно неизвестных $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - k)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn} - k)\gamma_n = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) имеет ненулевое решение при таких k, при которых определитель этой системы равен 0:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Уравнение (3) называется *характеристическим* уравнением для системы (1), корни этого уравнения $k_1, k_2, ..., k_n$ называются *характеристическими числами* системы (1).

Возможны три случая:

1. Корни характеристического уравнения $k_1, k_2, ..., k_n$ **действительные и различные.**

Для каждого из корней k_i составляем систему (2), из которой находим коэффициенты $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{in}$.

Решение однородной системы (1), соответствующее корню k_i, имеет вид:

$$y_{1i} = \alpha_{1i}\, e^{\kappa_i x},\ y_{2i} = \alpha_{2i}\, e^{\kappa_i x}, ..., y_{ni} = \alpha_{ni} e^{\kappa_i x}.$$

То есть:

1 решение, соответствующее корню k_1 имеет вид:

$$y_{11} = \gamma_{11} e^{\kappa_1 x},\ y_{21} = \gamma_{21} e^{\kappa_1 x}, ..., y_{n1} = \gamma_{n1} e^{\kappa_1 x}.$$

2 решение, соответствующее корню k_2 имеет вид:

$$y_{12} = \gamma_{12} e^{\kappa_2 x},\ y_{22} = \gamma_{22} e^{\kappa_2 x}, ..., y_{n2} = \gamma_{n2} e^{\kappa_2 x}.$$

- -

n-ое решение, соответствующее корню k_n имеет вид:

$$y_{1n} = \gamma_{1n} e^{\kappa_n x},\ y_{2n} = \gamma_{2n} e^{\kappa_n x}, ..., y_{nn} = \gamma_{nn} e^{\kappa_n x}.$$

Фундаментальная система решений имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\, e^{\kappa_1 x},\ \alpha_{12}\, e^{\kappa_1 x}, ..., \alpha_{1n} e^{\kappa_1 x}, \\ \alpha_{21}\, e^{\kappa_2 x},\ \alpha_{22}\, e^{\kappa_2 x}, ..., \alpha_{2n} e^{\kappa_2 x}, \\ -------------- \\ \alpha_{n1}\, e^{\kappa_n x},\ \alpha_{n2}\, e^{\kappa_n x}, ..., \alpha_{nn} e^{\kappa_n x}. \end{cases}$$

Общее решение системы (1) имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = C_1\,\alpha_{11}\,e^{\kappa_1 x} + C_2\,\alpha_{12}\,e^{\kappa_2 x} + \ldots + C_n\,\alpha_{1n}\,e^{\kappa_n x}, \\ y_2 = C_1\,\alpha_{21}\,e^{\kappa_1 x} + C_2\,\alpha_{22}\,e^{\kappa_2 x} + \ldots + C_n\,\alpha_{2n}\,e^{\kappa_n x}, \\ ------------------------------ \\ y^n = C_1\,\alpha_{n1}\,e^{\kappa_1 x} + C_2\alpha_{n2}\,e^{\kappa_2 x} + \ldots + C_n\,\alpha_{nn}\,e^{\kappa_n x}. \end{cases}$$

2. Корни характеристического уравнения различны, но среди них есть комплексные.

Пусть среди корней характеристического уравнения есть два комплексно-сопряженных корня $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$. Этим корням будут соответствовать решения:

$$\begin{aligned} y_{11} &= \alpha_{11}\,e^{(\alpha+i\beta)x}, y_{21} = \alpha_{21}\,e^{(\alpha-\beta i)x}, \ldots, y_{n1} = \alpha_{n1}\,e^{(\alpha+i\beta)x} \\ y_{12} &= \alpha_{12}\,e^{(\alpha+i\beta)x}, y_{22} = \alpha_{22}\,e^{(\alpha+i\beta)x}, \ldots, y_{2n} = \alpha_{2n}\,e^{(\alpha+i\beta)x} \end{aligned}.$$

Коэффициенты α_{j1}, α_{j2} $(j = 1, 2, \ldots, n)$ определяются из системы уравнений (2). Отделяя в этих решениях действительную и мнимую часть, получим два действительных линейно-независимых частных решения системы (1).

Линейные комбинации построенных линейно-независимых частных решений войдут в общее решение системы.

3. Среди корней характеристического уравнения есть кратные.

Пусть k_1 есть корень кратности *m,* тогда ему соответствует решение

$$y_1 = P_1(x)e^{k_1 x}, y_2 = P_2(x)e^{k_1 x}, \ldots, y_n = P_n(x)e^{k_1 x},$$

где $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ многочлены от *x*, степень которых не превышает $m-1$.

Заметим, что *m* коэффициентов этих многочленов являются произвольными, а остальные коэффициенты через них выражаются.

Полагая поочередно один из произвольных коэффициентов равным 1, а остальные коэффициенты — равными 0, получим *m* линейно-независимых частных решений.

Кратный корень k_1 может быть действительным или комплексным.

Если k_1 — действительный корень, то построенные частные решения также будут действительными.

Если k_1 — комплексный корень вида $k_1 = \alpha + i\beta$, то сопряженное число $k_2 = \alpha - i\beta$ также будет корнем характеристического уравнения, причем той же кратности *m*. Можно найти изложенным выше методом *m* линейно-независимых комплексных частных решений для корня $k_1 = \alpha + i\beta$ и, отделив в них действительные и мнимые части, построить $2m$ линейно-независимых действительных частных решений (решения для корня $k_2=\alpha-i\beta$ будут линейно-зависимыми с решениями для корня $k_1=\alpha+i\beta$).

Взяв линейную комбинацию всех построенных частных решений, получим общее решение системы (1).

Пример 1. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=2y_1+2y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=y_1+3y_2. \end{cases}$$

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\kappa & 2 \\ 1 & 3-\kappa \end{vmatrix}=0$$

или $k^2-5k+4=0 \Rightarrow k_1=1, k_2=4$.

Частное решение системы ищем в виде

$$y_1=\gamma_1 e^{\kappa x},\ y_2=\gamma_2 e^{\kappa x}.$$

Построим частное решение для корня $k_1=1$. Числа γ_1, γ_2 будем искать из системы (2):

$$\begin{cases} \gamma_1+2\gamma_2=0, \\ \gamma_1+2\gamma_2=0, \end{cases}$$

Откуда $\gamma_1=-2\gamma_2$, поэтому одно из чисел γ_1, γ_2 можно выбирать произвольно. Пусть $\gamma_2=1$, тогда $\gamma_1=-2$. Таким образом, числу $k_1=1$ соответствует частное решение $y_{11}=-2e^x$, $y_{12}=e^x$.

Аналогично найдем частное решение для корня $k_2=4$. Числа γ_1, γ_2 будем искать из системы (2):

$$\begin{cases} -2\gamma_1+2\gamma_2=0, \\ \gamma_1-\gamma_2=0, \end{cases}$$

Откуда $\gamma_1=\gamma_2$. Полагая $\gamma_1=\gamma_2=1$, получим второе частное решение $y_{21}=e^{4x}$, $y_{22}=e^{4x}$.

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1=-2C_1\, e^x+C_2\, e^{4x}, \\ y_2=C_1\, e^x+C_2\, e^{4x}. \end{cases}$$

Пример 2. Найти решение системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 3y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 + y_2, \end{cases}$ удовлетворяющее начальному условию $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\kappa & 1 \\ -1 & 1-\kappa \end{vmatrix} = 0$$

или $(3-k)(1-k)+1=0,\ k^2-4k+4=0,\ (k-2)^2=0 \Rightarrow k_1=k_2=2$, то есть имеем случай кратных корней. Найдем одно из решений системы в виде:

$$y_1 = \gamma_1 e^{2x},\ y_2 = \gamma_2 e^{2x}.$$

Коэффициенты γ_1, γ_2 будем искать из системы (2):

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ -\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \gamma_1 = -\gamma_2.$$

Полагая $\gamma_2 = -1$, получим $\gamma_1 = 1$. Тогда первое частное решение системы имеет вид:

$$y_{11} = e^{2x},\ y_{12} = -e^{2x}.$$

Второе частное решение системы будем искать в виде:

$$y_{21} = (A_1 x + A_2)e^{2x},$$
$$y_{22} = (B_1 x + B_2)e^{2x}.$$

Подставим эти выражения в исходную систему. Сокращая на e^{2x} и приравнивая коэффициенты при x и свободные члены, получим систему:

$$\begin{cases} A_1 - A_2 + B_1 = 0, \\ A_2 + B_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $A_2 = -B_2,\ A_1 = -B_1 - B_2$, где B_1, B_2 — произвольные.

В качестве линейно-независимых решений этой системы можно взять $A_1 = 1;\ A_2 = 0,\ B_1 = -1;\ B_2 = 0$ и $A_1 = 1;\ A_2 = 1,\ B_1 = 0;\ B_2 = -1$.

Тогда линейно-независимые частные решения исходной системы имеют вид:

$$y_{11} = e^{2x},\ \ y_{21} = -e^{2x},$$
$$y_{12} = (1+x)e^{2x},\ y_{22} = -xe^{2x}.$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 (1+x) e^{2x}, \\ y_2 = -C_1 e^{2x} - C_2\, x\, e^{2x}. \end{cases}$$

Найдем теперь решение системы, удовлетворяющее начальному условию $y_1(0)=1,\ y_2(0)=0$.

Составим систему и решим ее:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -C_1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 1, \\ C_1 = 0. \end{cases}$$

Искомое частное решение имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = (1+x) e^{2x}, \\ y_2 = -x\, e^{2x}. \end{cases}$$

Пример 3. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -7y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 - 5y_2. \end{cases}$$

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -7-\kappa & 1 \\ -2 & -5-\kappa \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(-7-k)(-5-k) + 2 = 0,\ k^2 + 12k + 37 = 0,\ \Rightarrow k_1 = -6+i;\ k_2 = -6-i\,.$$

То есть корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные. Решение системы ищем в виде:

$$y_1 = \gamma_1 e^{kx},\ y_2 = \gamma_2 e^{kx}.$$

Коэффициенты γ_1, γ_2 для корня $k_1 = -6+i$ будем искать из системы (2):

$$\begin{cases} (-1-i)\gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ -2\gamma_1 - (1-i)\gamma_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \gamma_1 = 1;\ \gamma_2 = 1+i.$$

Решение системы:

$$y_{11} = e^{(-6+i)x},\ \ y_{21} = (1+i) e^{(-6+i)x}\,.$$

Составим систему (2) для корня $k_2 = -6-i$

$$\begin{cases} (-1+i)\gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ -2\gamma_1 + (1+i)\gamma_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \gamma_1 = 1;\ \gamma_2 = 1-i.$$

Вторая система решений:

$$y_{12}=e^{(-6-i)x},\ \ y_{22}=(1-i)e^{(-6-i)x}$$

Частные решения можно записать в виде:

$$y_{11}=e^{-6x}\cos x,\ \ y_{21}=e^{-6x}(\cos x-\sin x),$$
$$y_{12}=e^{-6x}\sin x,\ \ y_{22}=e^{-6x}(\cos x+\sin x).$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1=C_1e^{-6x}\cos x+C_2\,e^{-6x}\sin x, \\ y_2=C_1e^{-6x}(\cos x-\sin x)+C_2\,e^{-6x}(\cos x+\sin x). \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

1. Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=y_1+y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx}=-2y_1+4y_2 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=3y_1-y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx}=10y_1-4y_2 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} y'=y-z \\ z'=-4y+4z \end{cases}.$

4. $\begin{cases} y'=2y+z \\ z'=-6y-3z \end{cases}.$

5. $\begin{cases} y_1'=2y_1-3y_2 \\ y_2'=3y_1+2y_2 \end{cases}.$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x+5y \\ \dfrac{dy}{dt}=-4x-4y \end{cases}.$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-y \\ \dfrac{dy}{dt}=4x-3y \end{cases}.$

8. $\begin{cases} x'=x-y \\ y'=5x-y \end{cases}.$

9. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = -y - 3z \end{cases}.$

10. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z \end{cases}.$

2. Найти решение системы уравнений, удовлетворяющее начальному условию:

11. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 + 4y_2 \end{cases}, \; y_1(0) = 0, \; y_2(0) = -1.$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}, \; x(0) = 1, \; y(0) = 1.$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y \end{cases}, \; x(0) = 1, \; y(0) = -5.$

Ответы

1.

1. $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \\ y_2 = C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{3x} \end{cases}.$

2. $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} \\ y_2 = 2C_1 e^{x} + 5C_2 e^{-2x} \end{cases}.$

3. $\begin{cases} y = C_1 + C_2 e^{5x} \\ z = C_1 - 4C_2 e^{5x} \end{cases}.$

4. $\begin{cases} y = C_1 + C_2 e^{-x} \\ z = -2C_1 - 3C_2 e^{-x} \end{cases}.$

5. $\begin{cases} y_1 = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \\ y_2 = e^{2x}(C_1 \sin 3x - C_2 \cos 3x) \end{cases}.$

6. $\begin{cases} x = 5C_1 \cos 2t + 5C_2 \sin 2t \\ y = (-4C_1 + 2C_2)\cos 2t - (2C_1 + 4C_2)\sin 2t \end{cases}.$

7. $\begin{cases} x = e^{-t}\left(C_1 + C_2 t\right) \\ y = e^{-t}\left(2C_1 + C_2\left(2t-1\right)\right) \end{cases}$.

8. $\begin{cases} x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \\ y = \left(C_1 - 2C_2\right)\cos 2t + \left(2C_1 + C_2\right)\sin 2t \end{cases}$.

9. $\begin{cases} y = e^{-2x}\left(C_1 + C_2 x\right) \\ z = e^{-2x}\left(-C_1 + C_2\left(1-x\right)\right) \end{cases}$.

10. $\begin{cases} y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} \\ z = -C_1 e^{x} - \dfrac{3}{2} C_2 e^{2x} \end{cases}$.

2.

11. $\begin{cases} y_1 = e^{2x} - e^{3x} \\ y_2 = e^{2x} - 2e^{3x} \end{cases}$.

12. $\begin{cases} x = \cos t - \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$.

13. $\begin{cases} x = 2e^{t} - e^{3t} \\ y = -4e^{t} - e^{3t} \end{cases}$.

Примерный тест

Часть А

1. Решением дифференциального уравнения $y' = 2\sqrt{y}$ является

1) $y = \dfrac{1}{2}y^2$ 3) $y = \sin x + C$

2) $y = (x + C)^2$ 4) $y = C \cdot \sqrt{x}$.

2. Общим решением дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ является

1) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$ 3) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

2) $y = Ce^{x}$ 4) $y = C_1\left(e^{2x} + x\right)$.

3. Дифференциальное уравнение $(2x - y)dy + (x + 3y)dx = 0$ является:
1) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными;
2) однородным дифференциальным уравнением;
3) линейным дифференциальным уравнением;
4) уравнением Бернулли.

4. Общим решением уравнения $y' - 2xy = 2x$ является:

1) $y = 5x + C$ 3) $y = Ce^{x^2} - 1$

2) $y = Cx^2 + 1$ 4) $x + 2y = C$.

5) Фундаментальную систему решений уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$ образуют функции:

1) $y_1 = x^2,\ y_2 = x$ 3) $y_1 = e^{2x},\ y_2 = e^{2x}$

2) $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{5x}$ 4) $y_1 = \sin 2x,\ y_2 = \cos 2x$.

Часть В

1. Какое решение дифференциальное уравнение называется частным? В чем его геометрический смысл?
2. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным? Приведите пример.
3. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным? Как его решают?
4. Сформулируйте условие, при выполнении которого левая часть уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ является полным дифференциалом некоторой функции.
5. Какой вид имеет общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах?
6. Как понижают порядок дифференциального уравнения, если оно не содержит явно искомой функции?
7. Какое решение дифференциального уравнения первого порядка называется особым?
8. Запишите общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения.
9. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного однородного уравнения.
10. Запишите определитель Вронского для системы решений y_1, y_2, y_3 линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка.
11. В чем заключается идея метода вариации постоянных?
12. Какой вид имеет общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.
13. При каких видах правой части для отыскания частного решения удобно пользоваться методом неопределенных коэффициентов?

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебно-методическое издание

Авторы-составители:

Кертанова Валерия Викторовна,
Рыжкова Ольга Яковлевна.

Дифференциальные уравнения:
практические занятия

Учебно-методическое пособие
для студентов, обучающихся по направлениям
«Педагогическое образование», «Биотехнические системы
и технологии», «Прикладная информатика»,
«Прикладная математика и информатика»

Подписано в печать 30.06.14. Формат 60×84/16.
Уч.-изд. л. 4,7. Усл.-печ. л. 6,07.
Тираж 100 экз. Заказ №

ИП «Николаев»,
г. Балашов, Саратовская обл., а/я 55.

Отпечатано с оригинал-макета,
изготовленного редакционно-издательским отделом
Балашовского института Саратовского университета.
412309, г. Балашов, Саратовская обл., ул. К. Маркса, 29.

Печатное агентство «Арья»,
ИП «Николаев», Лиц. ПЛД № 68-52.
412309, г. Балашов, Саратовская обл.,
ул. К. Маркса, 43.
E-mail: arya@balashov.san.ru2

Дифференциальные уравнения:

практические занятия