Балашовский институт (филиал)
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского»

Государственный экзамен по математике

*Учебно-методическое пособие для студентов,
обучающихся по специальности
«Педагогика и методика начального образования»*

Балашов
2014

УДК 51
ББК 22.1
Г72

Составители:

Н. В. Бурлак, В. В. Кертанова,
О. В. Савилова, А. В. Христофорова.

Рецензенты:

Кандидат технических наук наук, доцент
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный аграрный университет»
Т. А. Хвалько;
Кандидат педагогических наук, доцент Балашовского института (филиала)
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского»
О. А. Фурлетова.

Рекомендовано к изданию Научно-методическим советом
Балашовского института (филиала)
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского».

Г72 **Государственный экзамен по математике :** учеб.-методич. пособие для студентов, обучающихся по специальности «Педагогика и методика начального образования» / сост. Н. В. Бурлак, В. В. Кертанова [и др.]. — Балашов : Николаев, 2014. — 108 с.
ISBN 978-5-94035-539-7

Учебно-методическое пособие содержит определения основных понятий математики, соответствующие формулы, примеры и задачи с подробными решениями для оказания помощи студентам в систематизации знаний по основным вопросам математики и методики обучения математике при подготовке к государственному экзамену.

Издание адресовано студентам, обучающимся по специальности «Педагогика и методика начального образования» и направлению подготовки «Педагогическое образование», профиль «Педагогика и методика начального образования».

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-94035-539-7

Оглавление

Предисловие

Математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки выпускников. Обусловлено это тем, что математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры. Обучение математике ориентировано не столько на математическое образование, в узком смысле слова, сколько на образование с помощью математики. В соответствии с этим принципом главной задачей обучения математике становится формирование у обучаемых в процессе изучения математики качеств мышления, необходимых для полноценной деятельности человека в современном обществе.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности «Педагогика и методика начального образования» и написано в соответствии с программой государственного экзамена по математике и методике преподавания математики в начальной школе.

Пособие написано на основе практических занятий и лекций, читавшихся авторами в течение нескольких лет студентам факультета естественно-научного и педагогического образования Балашовского института (филиала) ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского». Авторы надеются, что данное пособие окажет помощь студентам и выпускникам при подготовке к государственному экзамену.

1. Множество. Способы задания множеств. Подмножество. Операции над множествами

Теория множеств возникла как новая область математики на рубеже XIX—XX вв. и за короткий срок стала фундаментом всей математической науки. Основоположником теории множеств считают немецкого математика Георга Кантора (1845—1918). На теоретико-множественной основе построены такие математические дисциплины как топология, функциональный анализ, общая алгебра и др. В то же время теоретико-множественные понятия находят свое приложение и в вопросах школьной математики (решение уравнений и неравенств, их систем и совокупностей и т. д.). Знания в области теории множеств нужны учителю начальных классов, во-первых, для понимания содержания начального курса математики; во-вторых, для освоения таких важных с профессиональной точки зрения понятий, как взаимно однозначное соответствие, отношение, число, геометрическая фигура. Окружающий нас мир также богат примерами множеств, подмножеств, пересечением и объединением множеств и т. п. В связи с этим каждый современный культурный человек должен быть знаком с языком теории множеств и ее приложениями.

Подсознательно первые представления о множестве у человека начинают формироваться с рождения, когда он погружается в удивительно многообразный мир окружающих его объектов и явлений. В нем уже генетически заложены возможности ускоренно воспроизвести весь опыт общения с этим миром, накопленный человечеством за многовековую историю. Уникальность этого генетического потенциала, прежде всего, и отличает человека от других существ. С первых же шагов мы не просто пополняем список знакомых нам объектов и явлений, а начинаем дифференцировать и классифицировать (горячее — холодное, сладкое — горькое, тяжелое — легкое и т. п.), объединяя тем самым объекты в некоторые совокупности. Первый же опыт общения с ними убеждает нас и в том, что каждый объект имеет сложную структуру (кто из нас не ломал игрушку, пытаясь выяснить, что она собой представляет), совокупность других объектов, из которых состоит сам.

Как уже отмечали, понятие множества является основным, подобно понятиям точки, плоскости, т. е. не сводится к другим понятиям математики и не определяется через другие понятия, а только поясняется. Поэтому вместо его определения приведем примеры. Можно говорить о множестве всех студентов данного вуза, о множестве всех людей на Земле, о множестве гласных букв русского алфавита, о множестве парт в данной аудитории, о множестве всех целых чисел, о множестве треугольников на плоскости и т. д. В повседневной жизни вместо слова «множество» употребляют слова «набор», «собрание», «коллекция», «совокупность» и т. д.

Таким образом, когда речь идет о множестве, то объединяют некоторые предметы или понятия в одно целое — множество, состоящее из этих предметов. Однако математический смысл слова «множество» отличается от того, как оно используется в обыденной речи, где его связывают с большим числом предметов. В математике наряду с такими множествами рассматривают и множества, состоящие из одного объекта, и множества, не содержащие ни одного объекта.

Создатель теории множеств Г. Кантор определил множество как «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью», а также «множество есть многое, мыслимое нами как единое». Разумеется, эти слова не могут рассматриваться как математически строгое определение множества, такого определения не существует, поскольку понятие множества является исходным, на основании которого строятся остальные понятия математики, т. е. множество является основным строительным материалом математики.

Под множеством понимаем совокупность каких-либо объектов. Объекты любой природы, входящие в данное множество, называются элементами множества. Элементами множеств могут быть самые разнообразные предметы: буквы, числа, функции, точки, углы, люди и т. д. Например, число 5 является элементом множества натуральных чисел, квадрат — элементом множества геометрических фигур, январь — элементом множества месяцев в году.

Для сокращения записи различных высказываний о множествах и их элементах принята следующая символика: множества принято обозначать большими буквами латинского алфавита: А, B, C,…. Предметы (объекты), составляющие некоторое множество, называются его элементами. Элементы множества принято обозначать строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, … Отношение между множеством и его элементом выражают при помощи слова «принадлежит». Слово «принадлежит» заменяют символом $\in$. Высказывание «Объект a принадлежит множеству A» записывают: $a \in A$. Эту запись можно прочитать иначе: объект a есть элемент множества A. Высказывание «Объект a не принадлежит множеству A» записывают: $a \notin A$. Эту запись можно прочитать иначе: «Объект a не является элементом множества A». Например, студент Иванов является элементом множества всех студентов данного вуза, буква $у$ является элементом множества гласных букв русского алфавита, число 4 является элементом множества целых чисел.

Для некоторых числовых множеств существуют специальные обозначения: N — множество натуральных чисел, Z — множество целых чисел, Z_0 — множество целых неотрицательных чисел, Q — множество рациональных чисел, R — множество всех действительных чисел.

Множества, состоящие из конечного числа элементов (причем неважно, известно это число или нет, главное, что оно существует), будем называть конечными, а множества, состоящие из бесконечного числа элементов, — бесконечными. Например, множество дисциплин, изучаемых в институте, конечно, а множество точек прямой — бесконечно. Если множество не содержит ни одного элемента, то его называют пустым множеством и обозначают символом $\emptyset$. Пример пустого множества — множество людей, живущих на Солнце. Существует лишь одно пустое множество.

Элементами множества также могут быть множества. Например, если говорить о множестве факультетов некоторого института, то элементы этого множества — группы, которые в свою очередь являются множествами студентов.

Определение: Множество B называется подмножеством множества A тогда и только тогда, когда каждый элемент множества B принадлежит множеству A. Записывают: $B \subset A$. Можно сказать также: множество B включено в A, множество B содержится в A. Согласно данному определению подмножества, каждое множество является подмножеством самого себя: $A \subset A$. Пустое множество есть подмножество любого множества *A: «$\emptyset \subset A$»*.

Определение: Множества A и B называют равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Обозначают: $A = B$. Например, множества $A = \{3, 5, 7, 9\}$ и $B = \{7, 3, 9, 5\}$ равны, так как состоят из одинаковых элементов.

Очевидно, что если $B \subset A$ и $A \subset B$, то $A = B$, т. е. если любой элемент из множества B является элементом множества A и любой элемент из множества A является элементом множества B, то $A = B$.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, а каждый элемент множества B является элементом множества C, то каждый элемент множества A является элементом множества C, т. е. $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

Множество считается заданным, если указано характеристическое свойство элементов этого множества, т. е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они.

Множество можно задать перечислением его элементов. Например, множество стран на земном шаре задается их списком в географическом атласе, множество учеников — их списком в классном журнале и т. д.

Если множество задано списком, то употребляются фигурные скобки, в которые помещены названия всех элементов множества, разделенные запятыми. Так, если a, b, c, d— обозначения различных объектов, то множество A этих объектов записывают: $A = \{a, b, c, d\}$.

Указанный способ задания применим только для конечных множеств, да и то при условии, что число элементов множества невелико. Поэтому для бесконечных множеств, конечных множеств с большим количеством элементов применяют другой способ задания множества: указывают характеристическое свойство его элементов.

Характеристическое свойство — это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит.

Например, множество двузначных чисел. Каждый его элемент обладает свойством: «быть двузначным числом». Это характеристическое свойство дает возможность определить принадлежность любого объекта этому множеству (37 принадлежит множеству двузначных чисел, а 498 не принадлежит множеству двузначных чисел и т. п.). При описании свойств множество обычно определяется как совокупность тех и только тех элементов из некоторого основного множества T, которые обладают данным свойством. В этом случае используют обозначение $A = \{x \in T | a(x)\}$. Бывают случаи, когда одно и то же множество можно задать, указав различные характеристические свойства его элементов. Например, квадрат можно задать как множество четырехугольников, у которых все стороны равны и углы равны или как множество прямоугольников с равными сторонами или как множество ромбов с прямыми углами.

Таким образом, чтобы задать некоторое множество, достаточно либо перечислить все его элементы, либо указать их характеристическое свойство.

Множества, отношения между ними, операции над множествами и их свойства изображаются, обычно, с помощью диаграмм Эйлера — Венна, а бинарные отношения иллюстрируются на матрицах и графах. Благодаря этому, основные понятия теории множеств можно представить в табличной или графической форме. Совокупность допустимых объектов называют универсальным множеством (обозначается I). На диаграммах Эйлера — Венна универсальное множество I часто изображают в виде прямоугольника, а его подмножества — кругами.

Множества можно определять также при помощи операций над некоторыми другими множествами.

Даны два множества: $A = \{2, 4, 6, 8\}$ и $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Образуем множество С, в которое включим элементы, принадлежащие хотя бы одному из данных множеств, т. е. множеству A или множеству B:

$C = \{ 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Полученное множество С называют объединением множеств A и B.

Определение: Объединением двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Объединение множеств A и B обозначают $A \cup B$. Таким образом, по определению, $A \cup B = \{ x |\ x \in A \vee x \in B\}$. Если изобразить множества A и B при помощи кругов Эйлера, то объединение данных множеств изобразится заштрихованной областью (рис. 1):

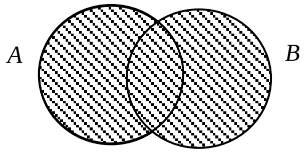


Рис. 1

Если элементы множеств A и B перечислены, то, чтобы найти объединение $A \cup B$, достаточно перечислить элементы, которые принадлежат множеству A или множеству B.

Например: $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

А как быть, если множества заданы характеристическими свойствами элементов? Из определения объединения следует, что характеристическое свойство элементов множества $A \cup B$, составляется из характеристических свойств элементов множеств A и B с помощью союза «или». Найдем, например, объединение множества A — четных натуральных чисел и множества B — двузначных чисел. Так как свойство элементов множества A — быть четным натуральным числом, а свойство элементов множества B — быть двухзначным числом, то в объединение данных множеств войдут числа, характеристическое свойство которых — быть четным натуральным или двузначным числом. Такие числа образуют бесконечное множество, но сформулированное характеристическое свойство позволяет однозначно определять, содержится тот или иной элемент в объединении множеств A и B или не содержится. Например, в $A \cup B$ есть число 8, поскольку оно четное; есть число 36 — оно четное и двузначное.

Рассмотрим теперь случай, когда находят объединение множества A и его подмножества B. Легко видеть, что тогда $A \cup B = A$ и, следовательно, характеристическое свойство элементов множества $A \cup B$ будет таким, как и свойство элементов множества A.

Умение вычленять множества в текстовых задачах и операций, которые над ними выполняются, — важный этап в их решении. Например, чтобы правильно выбрать действие, с помощью которого решается задача: «В букете *3* ромашки и *4* колокольчика. Сколько всего цветков в букете?», надо понять, что в задаче рассматриваются два множества — множество ромашек в букете (в нем *3* элемента) и множество колокольчиков в этом букете (в нем *4* элемента); эти множества объединены в одно и требуется найти число элементов в этом объединении.

Даны два множества: $A = \{2, 4, 6, 8\}$ и $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Образуем множество С, в которое включим элементы, принадлежащие одновременно множеству A и множеству B: $C = \{6, 8\}$. Полученное множество С называют пересечением множеств A и B.

Определение. Пересечением двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, которые одновременно принадлежат каждому из этих множеств.

Пересечение множеств A и B обозначают $A \cap B$. Таким образом, по определению, $A \cap B = \{\, x |\; x \in A \wedge x \in B\}$. Если изобразить множества A и B при помощи кругов Эйлера, то пересечение данных множеств изобразится заштрихованной областью (рис. 2):

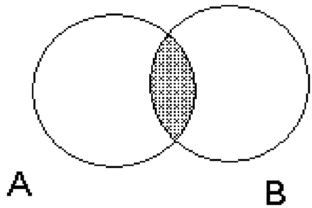


Рис. 2

Если элементы множеств A и B перечислены, то, чтобы найти $A \cap B$, достаточно перечислить элементы, которые принадлежат множествам A и B одновременно.

Например: $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.

Пересечение множеств более сильная операция, чем объединение.

Если множества A и B не имеют общих элементов, то говорят, что эти множества не пересекаются, и обозначают: $A \cap B = \emptyset$.

Если множества A и B имеют хотя бы один общий элемент, то говорят, что эти множества пересекаются.

Если заданы два множества, то можно не только найти их пересечение и объединение, но и вычесть из одного множества другое. Результат вычитания называют разностью и определяют следующим образом.

Определение. Разностью множеств A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B.

Разность множеств A и B обозначают $A\backslash B$. Тогда, по определению, имеем: $A\backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$.

Если представить множества A и B при помощи кругов Эйлера, то разность $A\backslash B$ изобразится заштрихованной областью (рис. 3):

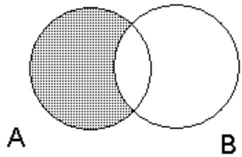


Рис. 3

В школьном курсе математики чаще всего приходится выполнять вычитание множеств в случае, когда одно из них является подмножеством другого, при этом разность множеств $A\backslash B$ называют дополнением множества B до множества A, и обозначают символом $B'A$. Например: $\{1, 2, 3\}\backslash\{2, 3, 4\} = \{1\}$.

Определение. Пусть $B \subset A$. Дополнением множества B до множества A называется множество, содержащее все элементы множества A, которые не принадлежат множеству B.

Обозначается: $B'A$.

Из определения следует, что $B'A = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$. В случае, когда $B \subset A$ то $A\backslash B = B'A$.

Выясним, как находить дополнение подмножества на конкретных примерах: Если элементы множеств A и B перечислены и $B \subset A$, то, чтобы найти дополнение множества B до множества A, достаточно перечислить элементы, принадлежащие множеству A и не принадлежащие множеству B. Так, если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а $B = \{2, 4\}$, то $B'A = \{1, 3, 5\}$.

В том случае, когда указаны характеристические свойства элементов множеств A и B, и известно, что $B \subset A$, то множество $B'A$ задают также с помощью характеристического свойства, общий вид которого $\{x \in A \wedge x \notin B\}$. Например, если A — множество четных чисел, а B — множество чисел, кратных 4, то $B'A$ — это множество, содержащее такие четные числа, которые не делятся на 4. Например, $22 \in B'A$, так как $22 \in A$ (т. е. оно четное) и $22 \notin B$ (т. е. оно не кратно 4).

Каков порядок выполнения действий в выражении $A \backslash B \cap C$? Условимся считать, что пересечение — более «сильная» операция, чем вычитание. Поэтому порядок выполнения действий в выражении $A \backslash B \cap C$ такой: сначала находят пересечение множеств B и C, а затем полученное множество вычитают из множества A.

Что касается объединения и вычитания множеств, то их считают равноправными и операции выполняются слева направо. Например, в выражении $A \backslash B \cap C$ надо сначала выполнить вычитание (из A вычесть B), а затем полученное множество объединить с множеством C.

2. Элементы комбинаторики. Декартово произведение множеств. Упорядоченные множества, кортежи. Общие правила комбинаторики. Перестановки. Размещения. Сочетания и треугольник Паскаля

Пусть задано множество X и пусть x и y — элементы этого множества (при этом может случиться, что $x = y$). Назовем $(x;\ y)$ упорядоченной парой, а x и y — компонентами или координатами этой пары. Например, число 35 записывается с помощью двух цифр 3 и 5. Эти цифры следует записывать в определенном порядке: сначала 3, а потом 5. Если их переставить, получится другое число 53. Говорят, что $(3; 5)$ — упорядоченная пара чисел. В число 44 входят две одинаковые цифры. Они образуют упорядоченную пару $(4; 4)$. Таким образом, в упорядоченных парах числа могут повторяться.

Пары $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ считаются совпадающими в том и только том случае, когда $x_1 = x$ и $y_1 = y_2$. Поэтому, если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ различны.

Упорядоченные пары можно составлять не только из чисел, но и из элементов любых множеств.

Например, из букв множества $X = \{a; b; c\}$ можно составить девять упорядоченных пар:

$$(a; a), (a; b), (a; c), (b; a), (b; b), (b; c), (c; a), (c; b), (c; c).$$

Примером упорядоченной пары натуральных чисел может служить пара, составленная из числителя и знаменателя дроби — вместо того, чтобы писать $\frac{3}{5}$, можно записать $(3; 5)$. При перестановке чисел 3 и 5 получается иная дробь — $\frac{5}{3}$.

Декартово произведение множеств

Еще более общее понятие упорядоченной пары получается, если брать ее компоненты из различных множеств. Например, компоненту x из множества X, а — y из множества Y. Пусть, например, заданы два множества $X = \{a; b; c\}$ и $Y = \{4; 5\}$. Образуем из элементов этих множеств пары так, чтобы первая компонента пары принадлежала множеству X, а вторая множеству Y. Все эти пары составляют множество: $(a; 4)$, $(a; 5)$, $(b; 4)$, $(b; 5)$, $(c; 4)$, $(c; 5)$, которое является декартовым произведением множеств X и Y, обозначают $X \times Y$.

Определение. Декартовым произведением множеств X и Y называют множество $X \times Y$, элементами которого являются все пары $(x; y)$ такие, что $x \in X$, $y \in Y$, т. е. $X \times Y = \{(x; y) | x \in X \wedge y \in Y\}$.

Если множества X и Y совпадают, т. е. $X = Y$, то множество $X \times X$ состоит из всех пар $(x; y)$ таких, что $x \in X$, $y \in Y$.

Полагают, что $X \times \emptyset = \emptyset \times X = \emptyset$ для любого множества X.

Декартово произведение множеств, вообще говоря, не обладает ни свойством коммутативности, ни свойством ассоциативности:

1) если $X \neq Y$, то
$$X \times Y \neq Y \times X;$$
2) если ни одно из множеств X, Y, Z не пусто, то
$$X \times (Y \times Z) \neq (X \times Y) \times Z.$$

Действительно, элементами множества $X \times Y$ являются пары $(x; y)$ такие, что $x \in X$ и $y \in Y$, а элементами множества $Y \times X$ — пары $(y; x)$, где $y \in Y$ и $x \in X$. Но, при $x \neq y$ пары $(x; y)$ и $(y; x)$ различны. Следовательно, если $\mathrm{X} \neq Y$, то множества $X \times Y$ и $Y \times X$ различны.

Элементы декартова произведения двух конечных множеств удобно располагать в виде таблицы, где по вертикали располагают элементы множества X, по горизонтали — элементы множества Y, а элементы множества $X \times Y$ пишут на пересечениях соответствующих строк и столбцов.

Например, на таблице, приведенной ниже, изображены элементы декартова произведения множеств $X = \{a; b; c\}$ и $Y = \{4; 5\}$.

y / x	4	5
a	$(a; 4)$	$(a; 5)$
b	$(b; 4)$	$(b; 5)$
c	$(c; 4)$	$(\mathrm{c}; 5)$

Кортежи

Пусть даны множества $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Возьмем какой-нибудь элемент a_1 из множества X_1, потом элемент a_2 из множества X_2, ... , элемент a_n— из множества X_n. Выбранные элементы расположим по порядку: $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$. Получаем упорядоченную n-ку элементов (читается: «энка»), выбранных из множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Вместо слов «упорядоченная n-ка» говорят короче — «кортеж» (французское слово «кортеж» означает торжественное шествие, например, говорят «свадебный кортеж» или «кортеж автомашин»). Число n называют длиной кортежа, элементы $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ — его компонентами.

Множества $X_1, X_2, \ldots, X_n$ могут иметь общие элементы или даже совпадать друг с другом. Например, слово «математика» — кортеж длины 10, составленный из элементов множества $X = \{\text{а}; \text{б}; \text{в}; \ldots; \text{э}; \text{ю}; \text{я}\}$ (при этом в слово «математика» входят не все буквы этого множества, а лишь часть этих букв). Предложение «Математика — царица всех наук» — это кортеж длины 4, компонентами которого являются слова русского языка. Каждое из этих слов — кортеж, составленный из букв. Таким образом, компонентами кортежа могут быть и кортежи. Можно составлять и кортежи, компонентами которых являются множества, например: $(\{a; b\}; \{c; d\}; \{e; f\})$.

В математике примером кортежа может служить набор цифр, входящих в десятичную запись какого-нибудь числа. Этот кортеж составлен из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, причем цифры могут повторяться, а при перестановке цифр может получиться иное число. Так, кортеж цифр числа 112231 имеет вид (1; 1; 2; 2; 3; 1).

Определение. Два кортежа $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ и $(b_1; b_2; \ldots; b_m)$ называют равными, если они имеют одинаковую длину, т. е. $n = m$, и каждая компонента первого кортежа равна компоненте второго кортежа с тем же номером, т. е. $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_m$, например, кортежи $(a; b; c)$ и $(a; b; c)$ равны, а кортежи $(a; b; c)$ и $(b; a; c)$ не равны.

Используя понятие кортежа, можно определить понятие декартова произведения трех, четырех и, вообще, n множеств. Пусть заданы n множеств: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (множества могут иметь общие элементы). Из элементов этих множеств образуем, кортежи длины n, первая компонента которых принадлежит множеству X_1, вторая — множеству X_2, ... , n-я — множеству X_n. Множество таких кортежей называют декартовым произведением множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и обозначают $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Общие правила комбинаторики

На практике часто приходится выбирать из некоторого множества объектов его подмножества, располагать элементы какого-то множества в том или ином порядке и т. д. Поскольку в таких задачах речь идет о тех или иных комбинациях, их называют комбинаторными. Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называют комбинаторикой.

Решение большинства комбинаторных задач основано на двух простых правилах, которые называют правилами суммы и произведения. Правило суммы позволяет найти число элементов в объединении двух конечных множеств, а правило произведения — число элементов их декартова произведения.

Обозначим число элементов конечного множества X через $n(X)$. Множество, состоящее из n элементов, назовем n-множеством. Например, если $X = \{a; b; c; d; e; f\}$, то $n\ (X) = 6$, и поэтому X является 6-множеством.

Пусть X содержит m элементов, а Y содержит k элементов. Найдем, сколько элементов содержит объединение $X \cup Y$. Однозначный ответ на этот вопрос можно дать лишь в случае, когда множества X и Y не пересекаются. В этом случае множество $X \cup Y$ содержит $m + k$ элементов, например, если $X = \{a; b; c; d\}, Y = \{e; f; \mathrm{g}\}$, то $X \cup Y = \{a; b; c; d; e; f; \mathrm{g}\}$ содержит $4 + 3 = 7$ элементов.

Таким образом, справедливо следующее утверждение: если множество X содержит m элементов, а множество Y содержит k элементов, причем эти множества не пересекаются, то множество $X \cup Y$ содержит $m + k$ элементов.

Иными словами,

$$n(X) = m; n(Y) = k \Rightarrow n(X \cup Y) = m + k. \qquad (1)$$

Это очевидное утверждение называют в комбинаторике правилом суммы.

В комбинаторике равенство (1) обычно формулируют следующим образом: если элемент x можно выбрать m способами, а элемент y можно выбрать k способами, то выбор элемента x или элемента y можно выбрать $m + k$ способами.

В случае, когда множества X и Y пересекаются, дело обстоит сложнее. Например, объединение множеств $X = \{a; b; c; d; e\}$ и $Y = \{d; e; f; \mathrm{g}\}$ состоит лишь из семи элементов: $X \cup Y = \{a; b; c; d; e; f; \mathrm{g}\}$, а не из $5 + 4 = 9$ элементов. Это объясняется тем, что элементы d и e принадлежат и множеству X и множеству Y, а в объединение $X \cup Y$ эти элементы входят лишь один раз (для множеств не имеет смысла говорить, что некоторый элемент входит в них несколько раз). Поэтому из суммы $5 + 4$ надо вычесть 2, т. е. число элементов пересечения $X \cap Y$.

Вообще, для любых двух множеств X и Y справедливо равенство:

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y). \qquad (2)$$

Итак, число элементов объединения двух множеств равно сумме чисел элементов в каждом из них, уменьшенной на число элементов пересечения этих множеств.

Приведем без вывода формулу для числа элементов в объединении трех множеств:

$$n(X \cup Y \cup Z) = n(X) + n(Y) + n(Z) - n(X \cap Y) - n(X \cap Z) - n(Y \cap Z) +$$
$$+n(X \cap Y \cap Z) \qquad (3)$$

Пример. Из 32 студентов группы 12 человек успешно сдали зачет по легкой атлетике, а 15 — по анатомии. 8 студентов получили неудовлетворительные отметки по обоим предметам. Сколько студентов имеют академическую задолженность?

Решение: Пусть множество X — множество студентов, получивших зачет по легкой атлетике. Пусть множество Y — множество студентов, получивших зачет по анатомии. Тогда $X \cup Y = 32 - 8$ — множество студентов, получивших зачет или по легкой атлетике или по анатомии. По формуле $n(X \cup Y) = n(X) + n\ (Y) - n(X \cap Y)$ получаем $n(X \cap Y) =$ $= n(X) + n(Y) - n(X \cup Y) = 12 + 15 - 24 = 3$ — число студентов, сдавших зачет и по легкой атлетике и по анатомии. Тогда $12 - 3 = 9$ — число студентов, сдавших зачет только по легкой атлетике, а $15 - 3 = 12$ — число студентов, сдавших зачет только по анатомии. Таким образом, $12 + 9 = 21$ — число студентов, имеющих академическую задолженность.

Второе основное правило комбинаторики — правило произведения — касается подсчета числа кортежей, которые можно составить из элементов данных конечных множеств. Рассмотрим сначала такую задачу: сколько пар вида $(x; y)$ можно составить из элементов множеств $X = \{x_1; x_2; \ldots; x_m\}$ и $Y = \{y_1; y_2; \ldots;\ y_k\}$. Запишем все эти пары в виде таблицы, которая состоит из m строк, в каждой из которых содержится k элементов. Значит, общее число пар равно mk.

Итак, число упорядоченных пар, которые можно составить из элементов m-множества X и k-множества Y, равно mk, т. е. произведению числа элементов множества X на число элементов множества Y. Множество упорядоченных пар, составленных из элементов множеств X и Y, называется декартовым произведением этих множеств и обозначается $X \times Y$. Поэтому доказанное утверждение можно коротко записать так:

$$n(X \times Y) = n(X) \cdot n(Y). \qquad (4)$$

Справедливо и более общее утверждение, называемое правилом произведения:

$$n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n) = n(X_1) \cdot n\,(X_2) \cdot \ldots \cdot n(X_n). \qquad (5)$$

В комбинаторике равенство (4) обычно формулируют следующим образом: если элемент x можно выбрать m способами, а элемент y можно выбрать k способами, то упорядоченную пару $(x; y)$ можно выбрать mk способами.

Пример. В гардеробе имеются три костюма и две рубашки. Сколькими способами можно выбрать одежду, состоящую из костюма и рубашки?

Решение. Чтобы решить задачу, обозначим костюмы числами 1, 2 и 3, а рубашки — буквами a и b. Тогда каждый вариант одежды, включающий костюм и рубашку, задается парой, состоящей из числа и буквы. Число пар такого вида по правилу произведения равно $2 \cdot 3 = 6$. Вот эти варианты:

$$(1; a), (1; b), (2; a), (2; b), (3; a), (3; b).$$

Иногда для решения задач приходится пользоваться обобщенным правилом произведения. Бывает, что хотя различные варианты выбора элемента y определяются уже сделанным выбором элемента x, число способов выбрать y при любом выборе x одно и то же. В этом случае пару $(x;\ y)$ тоже можно выбрать ml способами, где m — число способов выбрать элемент x, а l — число способов выбрать элемент y после того, как элемент x уже выбран.

Пример. Найдем число слов, содержащих 4 буквы, в которых любые две соседние буквы различны (число букв в алфавите равно 33; при этом допускаются и слова, лишенные смысла, например «ваха»).

Первую букву слова можно выбрать 33 способами. После того как она выбрана, следующую букву можно выбрать лишь 32 способами, так как повторить выбранную букву нельзя. Третья буква отлична от второй, хотя и может совпадать с первой, а потому ее можно выбрать 32 способами, равно как и четвертую. Поэтому общее число способов выбора равно $33 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 = 1\,081\,344$.

Размещения с повторениями

Рассмотрим задачу: найти число кортежей длины k, которые можно составить из элементов m-множества X. Чтобы решить ее, надо найти число кортежей в декартовом произведении $X \times X \times X \times \ldots \times X$, содержащем k множителей (это декартово произведение как раз и состоит из таких кортежей). Но по правилу произведения число элементов в декартовом произведении $X \times X \times X \times \ldots \times X$ равно $n(X) \cdot n(X) \cdot \ldots \cdot$

$n(X)$. Так как по условию $n(X) = m$ (множество X содержит m элементов), то $n(X \times X \times \ \dots \times X) = m \cdot m \cdot m \cdot \dots \cdot m = m^k$.

Итак, число кортежей длины k, составленных из элементов m-множества X, равно m^k.

Пример 1. Из букв русского алфавита составить слова, длиной 2, 3, 4,…

Решение. Воспользуемся формулой

$$n(X \times X \times \dots \times X) = m \cdot m \cdot m \cdot \dots \cdot m = m^k$$

и получим, что из 33 букв русского алфавита можно составить 33^2 слов длины *2* (*аа*, *аб*, *ав*,..., *ая*, *ба*, *бб*,..., *яю*, *яя*), 33^3 слов длины *3*, 33^4 слов длины *4* и т. д. Точно также из *10* цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 можно составить 10^2 двузначных номеров (00, 01,...,99), 10^3 трехзначных номеров и т. д.

Определение. Кортеж длины k, составленный из элементов m-множества, называют размещением с повторениями из m элементов по k, а число таких кортежей обозначают A_m^k (от французского слова *arrangement* — размещение).

Таким образом,

$$\bar{A}_m^k = m^k. \qquad (6)$$

Формула (6) позволяет решить такую задачу: Найти число подмножеств m— множества X.

Решение. Перенумеруем элементы множества $X = \{x_1; x_2; \ \dots; x_m\}$. Каждое подмножество $A \subset X$ можно «зашифровать» с помощью кортежа длины m из нулей и единиц; пишем на некотором месте *1*, если элемент с данным номером входит в подмножество, и 0, если он не входит. Например, если $X = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5\}$, то кортеж (0; 1; 1; 0; 1) шифрует подмножество $\{x_2; x_3; x_5\}$, а кортеж (0;0;0;0;0) — пустое подмножество, а кортеж (1; 1; 1; 1; 1) — все X. Поэтому найти число подмножеств m-множества X — это все равно, что найти число кортежей длины m, составленных из элементов *2*-множества $\{0; 1\}$. По формуле (1) число таких кортежей равно 2^m. Значит, число подмножеств — множества X равно 2^m. Например, множество $X = \{a; b; c\}$ имеет $2^3 = 8$ подмножеств: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}, \{a; b; c\}$.

Пример. Пятеро студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки, если известно, что никому из них не будет поставлена неудовлетворительная оценка?

Решение: Каждый из студентов может получить любую из оценок: 5, 4, 3. Рассматриваем множество X, которое состоит из трех различных элементов. При этом порядок расстановки оценок существенен, оценки могут повторяться, а общее число оценок равно четырем. Таким образом, нужно составить размещения с повторениями из трех элементов по пяти: $\overline{\mathrm{A}}_3^5 = 3^5 = 81$.

Размещения без повторений. Перестановки

Рассмотрим задачу: из 4-множества $X = (a; b; c; d)$ составим кортежи длины 2:

$$(a; a), (a; b), (a; c), (a; d), (b; a), (b; b), (b; c), (b; d),$$
$$(c; a), (c; b), (c; d), (c; c), (d; a), (d; b), (d; c), (d; d).$$

Их получилось 16. Заметим, что в этой задаче элементы повторяются. Решим эту же задачу при условии, что элементы не повторяются:

$$(a; b), (a; c), (a; d), (b; a), (b; c), (b; d),$$
$$(c; a), (c; b), (c; d), (d; a), (d; b), (d; c).$$

Получили 12 кортежей. Если элементы не повторяются, то такие кортежи называются размещениями без повторений из n элементов по m элементов.

Определение. Размещениями без повторений из n элементов по m элементов называют кортежи длины m, составленные из неповторяющихся элементов множества, содержащего n элементов.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n - т + 1). \qquad (7)$$

То есть для нашей задачи получаем $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$.

Формулу для A_m^k можно записать иначе, умножив и разделив первую часть формулы (3) на $1 \cdot 2 \ldots (m-k)$. Получим:

$$A_m^k = \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \ \ldots \ \cdot (m-k+1)(m-k) \cdot \ \ldots \ \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \ \ldots \ \cdot (m-k)} = \frac{m\,!}{(m-k)\,!}.$$

Произведение первых m натуральных чисел в математике называют «m-факториал» и обозначают $m!$. По определению $0! = 1$.

Итак,

$$A_m^k = \frac{m!}{(m-k)\,!}. \qquad (8)$$

Если $m = k$, то размещения без повторений из m элементов по k называют перестановками и обозначают P_m:

$$P_m = A_m^m = m! \qquad (9)$$

Пример 1. В команду КВН от курса выбрали 11 студентов. Из них нужно выбрать капитана и его помощника. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Нам дано множество, состоящее из 11 элементов, из него выбираются 2 элемента. Порядок существенен. Элементы не могут повторяться. Таким образом, нужно найти число размещений без повторений из 11 элементов по 2 элемента в каждом по формуле (8): $А_9^2 = 9 \cdot 8 = 72$.

Сочетания без повторений

Рассмотрим следующую задачу комбинаторики: сколько подмножеств, содержащих k элементов каждое, можно составить из элементов данного m-множества X?

Такие подмножества называют сочетаниями без повторений из m элементов по k, а их число обозначают C_m^k (от французского слова *combinaison* — «сочетание»).

Выведем формулу, выражающую C_m^k через m и k. Возьмем какое-нибудь k-подмножество A в m-множестве X. Так как A содержит k элементов, то его можно упорядочить $k!$ способами. При этом каждое упорядоченное k-множество, состоящее из элементов множества X, может быть получено таким путем. Значит, число упорядоченных k-множеств, составленных из элементов множества X, в $k!$ раз больше числа неупорядоченных k-подмножеств в X. Например, из элементов множества $A = \{a;\ b; c; d\}$ можно составить четыре 3-подмножества: $\{a; b; c\}, \{a; b; d\}, \{a; c; d\}, \{b; c; d\}$. Число же упорядоченных 3-подмножеств в 3! = 6 раз больше. Но число упорядоченных k-множеств равно A_m^k, а число k-подмножеств обозначили C_m^k. Поэтому

$$A_m^k = k!\, C_m^k.$$

Так как $A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}$, то

$$C_m^k = \frac{m!}{(m-k)!\,k!}. \tag{10}$$

Эта формула выражает число k-подмножеств в m-множестве X.

Сочетания с повторениями

Общая формулировка задач на сочетания с повторениями такова: имеются предметы n различных типов. Сколько существует различных комбинаций длины k из этих элементов, если порядок следования элементов не важен и элементы могут повторяться. Формула для вычисления числа таких комбинаций имеет вид:

$$\overline{C_n^k} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k. \tag{11}$$

Пример 1. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных. Сколькими способами можно выбрать 7 пирожных?

Решение. $\overline{C}_4^7 = C_{4+7+1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120.$

Числа C_m^k, выражающие количество k-подмножеств в m-множестве X, обладают целым рядом замечательных свойств. Эти свойства выражают различные соотношения между подмножествами множества X.

1) если $0 \le k \le m$, то верно равенство $C_m^k = C_m^{m-k}$;

2) для любых k и m, таких, что $0 \leq k \leq m$, верно равенство

$$C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k.$$

Отметим, что при $k = 0$ получаем равенство $C_m^0 = C_{m-1}^{-1} + C_{m-1}^0$. Так как $C_m^0 = C_{m-1}^0 = 1$, то следует положить $C_{m-1}^{-1} = 0$. Аналогично следует положить $C_m^k = 0$ при $k < m$.

Тогда равенство $C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k$ оказывается верным и при $k = m$.

С помощью этого тождества можно последовательно вычислить C_m^k сначала при $m = 0$, затем при $m = 1$, при $m = 2$ и т. д. Вычисления удобно записывать в виде треугольной таблицы:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

и т. д.

Эту треугольную таблицу называют треугольником Паскаля, по имени французского математика Блеза Паскаля (1623—1662), в трудах которого она встречается. Это название исторически неточно, так как такую таблицу знал уже арабский математик Омар Хайям, живший в XIII в.

3. Высказывания и логические операции над ними

Начало науки о законах и формах мышления связывают с именем Аристотеля, «отцом логики», как его называли в средневековой Европе. Прошло два тысячелетия, прежде чем Г. Лейбниц предложил ввести в логику математическую символику и использовать ее для общих логических построений. Эту идею последовательно реализовал в XIX в. Дж. Буль и тем самым заложил основы математической (символической) логики.

Термин «математическая логика» может быть истолкован двояко:

с одной стороны, эта отрасль науки строится как математическая теория, в ней используются математические методы, т. е. в этом смысле она представляет собой «математику логики», с другой стороны, разрабатывая точный логический язык математики, она служит «логикой математики». Тщательный анализ соотношения предметов математики и логики связан с глубокими философскими проблемами и не может быть предметом нашего рассмотрения.

Одна из характерных особенностей математической логики — использование математического языка символов и формул.

В элементарной алгебре буквами обозначают в основном числа. В логике буквами обозначаются логические объекты, например предложения. Под предложением понимают то, что обычно понимают под этим термином в грамматике любого естественного языка, а именно языковое выражение или соединение слов, имеющее самостоятельный смысл.

В процессе рассуждения (не только в математике) из одних предложений формируем другие, преобразуя их с помощью частицы не или соединяя их с помощью союзов «и; или; если, то; тогда и только тогда» и др., обозначающих логические связи между предложениями.

Для выяснения структуры сконструированных таким образом сложных предложений удобно исходные предложения обозначать буквами, отвлекаясь от их конкретного содержания.

Любое повествовательное предложение, относительно которого имеет смысл говорить, что его содержание истинно или ложно, будем называть высказыванием.

Например, «Лондон — столица Англии» — истина, «Париж — столица России» — ложь. Эти предложения являются высказываниями, поскольку каждое из них однозначно: либо истина, либо ложь. Обозначается: истинностное значение высказывания — 1, а ложного — 0. Иногда содержание предложения таково, что не может быть единого мнения о том, истинно оно или ложно: например, предложение «$x < 5$» не является высказыванием, так как не имеет смысла говорить, что оно истинно или ложно. Если на место переменной x подставить какое-нибудь число (ее значение), то получим высказывание, истинное или ложное в зависимости от того, какое число подставлено.

Сложные предложения образуются из нескольких простых с помощью союзов «и», «или», «если, то» и т. д. В математической логике эти союзы называются логическими связками.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение (истинное или ложное), называется элементарным.

Высказывание, образованное из элементарных высказываний с помощью логических связок, называется составным (или сложным) высказыванием.

1. Логическое умножение. Конъюнкция

Соединение двух простых высказываний A и B в одно составное с помощью союза «и» называют логическим умножением, или конъюнкцией, а результат операции — логическим произведением.

Обозначается: $A \wedge B$.

Конъюнкция двух логических переменных истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны. Таблица истинности для конъюнкции имеет вид:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2. Логическое сложение. Дизъюнкция

Соединение двух простых высказываний A и B в одно составное с помощью союза «или», называется логическим сложением, или дизъюнкцией, а полученное составное высказывание — логической суммой.

Обозначается: $A \vee B$.

Дизъюнкция двух логических переменных ложна тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны. Дизъюнкция имеет следующую истинностную таблицу:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. Логическое отрицание. Инверсия

Присоединение частицы «не» к сказуемому данного простого высказывания A, присоединение слов «Неверно, что …» ко всему данному высказыванию A называются операцией логического отрицания, или инверсией.

Обозначается: $\overline{A}$ или $\neg A$.

Инверсия логической переменной истинна, если сама переменная ложна, и, наоборот, инверсия ложна, если переменная истинна.

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

4. Логическое следование. Импликация

Логическое следование, или импликация, соответствует обороту «если…, то…». Обозначается $A \Rightarrow B$ или $A \rightarrow B$.

Читается: если A, то B; из A следует B; A имплицирует B; A достаточно для B; B необходимо для A.

Высказывание $A \rightarrow B$ ложно в том и только в том случае, когда условие (первое высказывание A) истинно, а следствие (второе высказывание B) ложно.

Истинностная таблица для импликации такова:

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5. Логическая равносильность. Эквиваленция

Логическая равносильность, или эквиваленция, соответствует оборотам речи: «тогда и только тогда»; «в том и только в том случае». Обозначается: $A \Leftrightarrow B$ или $A \leftrightarrow B$.

Выражение $A \leftrightarrow B$ истинно в том и только в том случае, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

Истинностная таблица для эквиваленции имеет вид:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Определение. Сложное высказывание, которое принимает значение «истина» при любом распределении входящих в это высказывание элементарных высказываний, называется тождественно истинным, тавтологией, или законом логики.

Определение. Сложное высказывание, которое принимает значение «ложь» при любом распределении входящих в это высказывание элементарных высказываний, называется тождественно ложным, или противоречием.

Определение. Сложные высказывания A и B называются равносильными, если при любом выборе истинностных значений элементарных высказываний, входящих в A и B, высказывания A и B принимают одинаковые истинностные значения.

Запись $A = B$ означает, что A и B равносильны.

4. Строение и виды теорем

В различных разделах математики часто сталкиваемся с предложениями, которые называются теоремами.

Теорема — это высказывание, истинность которого устанавливается посредством рассуждения (доказательства).

Чаще всего теоремы формулируются в виде импликаций. Используя квантор общности, такую теорему можно записать следующим образом:

$$(\forall x \in U)\big(a(x) \Rightarrow b(x)\big). \qquad (1)$$

Предложение $a\,(x)$ называется условием теоремы (то, что дано), предложение $b\,(x)$ — заключением теоремы (то, что требуется доказать). Символическая запись $(\forall x \in U)$ называется разъяснительной частью, в которой описывается множество объектов, упомянутых в теореме.

Рассмотрим еще один пример. Пусть $a\,(x)$ — предложение «параллелограмм x является ромбом», предложение $b\,(x)$ — «диагонали параллелограмма x взаимно перпендикулярны». Оба предложения заданы на множестве U всех параллелограммов. Тогда теорема вида (1) будет сформулирована следующим образом: «Для любого параллелограмма верно утверждение: если параллелограмм — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны». Обычно эту теорему формулируют короче: «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны». Но под этой краткой формулировкой подразумевается именно то, что содержится в этой развернутой формулировке.

В дальнейшем теоремы, имеющие вид (1), будем записывать короче:

$$a(x) \Rightarrow b(x)\,.$$

Поменяв местами условие и заключение теоремы, но оставив без изменения разъяснительную часть, получим новое высказывание $b(x) \Rightarrow a(x)$, которое формулируется следующим образом: «Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб». Высказывание с логической структурой $b(x) \Rightarrow a(x)$ называется обратным по отношению к высказыванию с логической структурой $a(x) \Rightarrow b(x)$, а получившаяся теорема — обратной теоремой.

Важно понимать, что для пары прямой и обратной теорем могут осуществляться все три возможности, а именно:

1) обе теоремы могут быть верными;
2) одна из теорем может быть верной, а другая — неверной;
3) обе теоремы могут быть неверны.

Приведем соответствующие примеры.

Теорема «Если сумма цифр натурального числа делится на 3, то и число делится на 3» и обратная ей теорема «Если натуральное число делится на 3, то и его сумма цифр делится на 3» являются верными.

Из теорем «Если четырехугольник — прямоугольник, то его диагонали равны» и «Если диагонали четырехугольника равны, то четырехугольник — прямоугольник» первая верна, а вторая теорема неверна (в качестве контрпримера можно взять равнобочную трапецию).

Если в формулировке некоторой теоремы заменить условие и заключение их отрицаниями, то получится формулировка теоремы, противоположной исходной. Например, для теоремы «Если четырехугольник — параллелограмм, то его диагонали точкой пересечения делятся пополам» противоположная теорема формулируется следующим образом: «Если четырехугольник не является параллелограммом, то его диагонали точкой пересечения не делятся пополам». В данном случае обе теоремы верны.

Итак, для каждой теоремы $a(x) \Rightarrow b(x)$ можно сформулировать еще три теоремы:

обратную: $b(x) \Rightarrow a(x)$;

противоположную: $\overline{a(x)} \Rightarrow \overline{b(x)}$;

противоположную обратной: $\overline{b(x)} \Rightarrow \overline{a(x)}$.

Возьмем в качестве исходной (прямой) теорему «Если четырехугольник — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны» (теорема верна).

Тогда указанные три теоремы формулируются так:

обратная теорема: «Если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то четырехугольник является ромбом» (теорема неверна);

противоположная теорема: «Если четырехугольник не ромб, то его диагонали не перпендикулярны» (теорема неверна);

противоположная обратной: «Если диагонали четырехугольника не взаимно перпендикулярны, то четырехугольник не является ромбом» (теорема верна).

В рассмотренном примере прямая теорема и теорема противоположная обратной оказались истинными, а обратная и противоположная — ложными. Это совпадение не является случайным. Между этими четырьмя видами теорем существует тесная взаимосвязь, а именно:

1) теоремы $a(x) \Rightarrow b(x)$ и $\overline{b(x)} \Rightarrow \overline{a(x)}$, т. е. прямая и противоположная обратной одновременно истинны или ложны;

2) теоремы $b(x) \Rightarrow a(x)$и $\overline{a(x)} \Rightarrow \overline{b(x)}$, т. е. обратная и противоположная, также одновременно истинны или ложны.

Отсюда следует, что нет необходимости доказывать все четыре теоремы. Доказав (или опровергнув), например, прямую и обратную теоремы, тем самым устанавливаем истинность или ложность всех четырех теорем.

Строго говоря, термин «теорема» следует употреблять только применительно к истинным высказыванием. Если же высказывание не является истинным, то правильнее назвать его ложным высказыванием.

При формулировке теорем часто используют термины «достаточно», «необходимо», «необходимо и достаточно». Поясним смысл этих терминов.

В теореме $a(x) \Rightarrow b(x)$ условие $a(x)$ называют достаточным условием для заключения $b(x)$, а заключение теоремы $b(x)$ называют необходимым условием для $a(x)$. Для примера рассмотрим теорему «Если углы вертикальные, то они равны». Условие теоремы является достаточным условием для заключения теоремы, т. е. для того, чтобы углы были равны достаточно, чтобы эти углы были вертикальными.

Заключение этой теоремы является необходимым условием для условия теоремы, т. е. для того, чтобы углы были вертикальными необходимо, чтобы эти углы были равны.

Если справедлива и прямая теорема, и ей обратная, то условие $a(x)$ является необходимым и достаточным для $b(x)$, а $b(x)$ — необходимым и достаточным условием для $a(x)$.

Например, рассмотрим теорему «Если сумма цифр натурального числа делится на 3, то и само число делится на 3». Теорема ей обратная тоже верна. Значит можно сказать, что для делимости числа на 3 необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр числа делилась на 3.

Заметим, если в теореме содержатся слова «необходимо и достаточно», то доказательство должно состоять из доказательства и необходимости, и достаточности, т. к. в такой формулировке на самом деле объединены формулировки двух теорем — прямой и обратной.

5. Натуральные и целые числа. Рациональные числа. Представление рационального числа десятичными дробями

Число — это важнейшее математическое понятие. Представление о числах складывались у человека постепенно под влиянием практических требований.

Натуральные числа появились на самих ранних этапах развития человеческой цивилизации в связи с необходимостью подсчета предметов. Первоначально понятие отвлеченного числа отсутствовало — число было «привязано» пересчитываемым предметам, и в языке первобытных народов существовали различные словесные обороты для обозначения одного и того же числа разных предметов. Отвлеченное понятие натурального числа (не связанного с пересчетом конкретных предметов) появляется и закрепляется с развитием письменности и введением для обозначения чисел определенных символов. Термин «натуральное число» появился в V в. в трудах римского ученого Боэция. Во второй половине XIX в. натуральные числа оказались фундаментом математической науки, и появилась необходимость в строгом логическом обосновании понятия натурального числа. Так как математика XIX в. перешла к аксиоматическому построению своих теорий, то была разработана аксиоматическая теория натурального числа.

Как уже было сказано, натуральные числа 1, 2, 3, … получаются при счете предметов. Например, пересчитав книги, стоящие на полках книжного шкафа, утверждаем, что на первой полке 7 книг, а на второй, допустим, 10 книг. Если же на одной из полок книжного шкафа книг нет, то мы говорим, что на этой полке 0 (нуль) книг.

Если к множеству всех натуральных чисел $N = \{1; 2; 3;\dots\}$ присоединить число 0, то получим множество неотрицательных целых чисел $Z_0 = \{0; 1; 2; 3;\dots\}$.

Для решения практических задач и отражающих реальную ситуацию математических задач неотрицательных целых чисел также оказалось недостаточно. Так для того, чтобы охарактеризовать движение в противоположных направлениях, температуру воздуха выше и ниже нуля, требуются противоположные числа. Например, температура воздуха в семь градусов тепла характеризуется числом +7 °C, а температура воздуха в семь градусов мороза характеризуется числом −7 °C. Числа 7 и −7 называются противоположными числами. В общем случае для натурального числа n противоположным будет $-n$, а нуль считается противоположным самому себе.

Натуральные числа, числа, противоположные натуральным, и нуль составляют Z множество целых чисел.

На множестве целых чисел определены операции сложения, вычитания и умножения, т. е. в результате этих операций всегда получается целое число. Операция деления на множестве целых чисел определена не для любых двух целых чисел. Например, число 5 нельзя разделить на число 3 так, чтобы в результате получилось целое число.

Решение практических задач, связанных с делением и измерением величин, привело к необходимости расширения множества целых чисел, т. е. появилась необходимость введения дробных чисел.

Целые и дробные числа составляют множество рациональных чисел, которое обозначается Q.

Положительными рациональными числами называются числа вида $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Такие числа называются еще положительными обыкновенными дробями. Число m называют числителем дроби, а число n — знаменателем дроби.

Числа вида $-\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа, называются отрицательными рациональными числами. Их еще называют отрицательными обыкновенными дробями.

Любое отрицательное и положительное целое число можно представить в виде обыкновенной дроби, у которой знаменатель равен 1. Например,

$$3 = \frac{3}{1}, -4 = -\frac{4}{1}.$$

Число 0 можно представить в виде обыкновенной дроби, у которой числитель равен нулю:

$$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \cdots$$

Две обыкновенные дроби считаются равными, если одна из них получается из другой умножением числителя и знаменателя на одно и то же натуральное число. Например,

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12}, \qquad -\frac{1}{5} = -\frac{2}{10} = -\frac{6}{30}.$$

Множество всех обыкновенных дробей (положительных, отрицательных и равных нулю) образуют множество рациональных чисел.

Для рациональных чисел определены операции сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль). Говорят, что множество рациональных чисел замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль). Это означает, что сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел будет рациональным числом.

Теорема 1. Каждое рациональное число представимо в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби. Поясним сказанное на примерах.

Если знаменатель обыкновенной дроби равен натуральной степени числа 10, то говорят, что эту дробь можно записать в виде конечной десятичной дроби:

$$\frac{7}{10} = 0{,}7; \ -\frac{32}{10} = -3{,}2; \ \frac{173}{100} = 1{,}73.$$

В виде конечной десятичной дроби представима дробь, знаменатель которой не имеет других простых делителей кроме 2 и 5. В этом можно легко убедиться, воспользовавшись способом «деления уголком» числителя на знаменатель. Например,

$$\frac{3}{25} = 0{,}12; \quad \frac{7}{50} = 0{,}14; \quad -\frac{11}{20} = -0{,}55.$$

Очевидно, любую конечную десятичную дробь можно записать в виде обыкновенной дроби. Причем после сокращения дроби ее знаменатель не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5. Запишем в виде несократимой обыкновенной дроби следующие десятичные дроби: 0,4; $-0{,}25$; 1,6.

Имеем: $0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$; $\quad -0{,}25 = -\frac{25}{100} = -\frac{1}{4}$; $\quad 1{,}6 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$.

Если же знаменатель несократимой обыкновенной дроби имеет простой делитель, отличный от 2 и 5, то эта дробь не может быть представлена в виде конечной десятичной дроби. Например, $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$; $-\frac{5}{9} = -0{,}555\ldots$

Выражения вида $0{,}333\ldots; -0{,}555\ldots$ называют бесконечными десятичными дробями. Эти дроби обладают особенностью — они являются периодическими, т. е. начиная с некоторой цифры, они образуются бесконечным повторением одной и той же группы цифр. Для записи бесконечных периодических десятичных дробей используют специальное обозначение — повторяющуюся группу цифр, которую называют периодом этой дроби, заключают в скобки. Например,

$$0{,}333\ldots = 0,(3); -0{,}555\ldots = -0,(5);\ 2,5353\ldots = 2,(53);$$
$$0{,}14545\ldots = 0{,}1(45).$$

Заметим, что конечные десятичные дроби можно записывать в виде бесконечных периодических десятичных дробей, приписав к ней справа нули. В виде бесконечных периодических десятичных дробей можно записывать и целые числа. Например,

$$0{,}25 = 0{,}25000\ldots = 0{,}25(0);\ -1{,}7 = -1{,}7000\ldots = 1{,}7(0);$$
$$3 = 3{,}000\ldots = 3,(0).$$

Учитывая это замечание, можно теорему 1 сформулировать в следующем виде: каждое рациональное число представимо в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Верно и обратное утверждение: каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является представлением некоторого рационального числа. Покажем, как можно найти число, равное периодической дроби.

Пример. Найти рациональное число, равное периодической дроби

$$\text{а) } 0,(7);\text{ б)}1{,}3(2);\text{ в)}0{,}15(34).$$

Решение.

а) Умножим бесконечную периодическую десятичную дробь на 10:

$$0,(7)\cdot 10 = 7,(7) = 7 + 0,(7).$$

Обозначим через x искомое рациональное число. Имеем

$$x \cdot 10 = 7 + x,$$
$$9 \cdot x = 7,$$
$$x = \frac{7}{9}.$$

Проверкой убеждаемся, что действительно $\frac{7}{9} = 0,(7)$.

б) $1{,}3(2) = 1 + 0{,}3(2)$. Пусть $x = 0{,}3(2)$.

Тогда $10x = 3,(2)$, $100x = 32,(2)$.

Вычтем почленно первое равенство из второго. Имеем:

$$90x = 32,(2) - 3,(2),$$

$$90x = 29,$$
$$x = \frac{29}{90}$$
Значит, $1{,}3(2) = 1 + x = 1 + \frac{29}{90} = \frac{119}{90}$.

в) Пусть $0{,}15(34) = x$. Тогда
$$100x = 15,(34),$$
$$10000x = 1534,(34).$$
Вычтем почленно первое равенство из второго. Имеем:
$$9900x = 1534,(34) - 15,(34),$$
$$9900x = 1534 - 15,$$
$$x = \frac{1519}{9900}.$$
Значит, $0{,}15(34) = \frac{1519}{9900}$.

Ответ: а) $\frac{7}{9}$; б) $\frac{119}{90}$; в) $\frac{1519}{9900}$.

6. Множество действительных чисел. Действия над действительными числами. Координатная ось и числовая прямая

Существуют алгебраические и геометрические задачи, которые не имеют решения во множестве рациональных чисел. Возникает необходимость дальнейшего расширения множества рациональных чисел.

Рассмотрим число $\sqrt{2}$. Это число является положительным корнем уравнения $x^2 = 4$, длина диагонали единичного квадрата равна $\sqrt{2}$. Покажем, что число $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Доказательство проведем методом от противного.

Предположим, что $\sqrt{2}$ — рациональное число, т. е. это число может быть представлено в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа.
$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$
Возведем обе части равенства в квадрат:
$$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2,\ 2 = \frac{m^2}{n^2}, 4n^2 = m^2.$$
Число $2n^2$ четно (кратно 2). Значит m^2 и, следовательно, m также четное число. (Действительно, если бы m было нечетным $m = 2k + 1$, то $m^2 = (4k^2 + 4k) + 1$ — также нечетное число.) Но если m — четное число, то его можно записать в следующем виде: $m = 2k$. Тогда равенство $2n^2 = m^2$ запишется в виде $2n^2 = 4k^2$. Значит, $n^2 = 2k^2$. Из последнего равенства видно, что n^2 четно, следовательно, и n тоже

четно. Вывод: m и n четные числа, значит дробь $\frac{m}{n}$ не является несократимой. Но по предположению дробь $\frac{m}{n}$ несократима. Полученное противоречие доказывает, что число $\sqrt{2}$ непредставимо в виде дроби $\frac{m}{n}$ и, следовательно, не является рациональным. Число $\sqrt{2}$ — иррациональное число.

Известно, что любая периодическая десятичная дробь выражает некоторое рациональное число. Можно сделать вывод, что иррациональные числа выражаются непериодическими бесконечными десятичными дробями. Примером иррационального числа может служить 0,101001000100001…, т. к. число нулей, которые следуют за единицей, все время возрастает, то эта дробь не является периодической. Можно показать, что $\sqrt{2}$ = 1,41421356…

Определение 1. Число, выражаемое бесконечной десятичной непериодической дробью, называется иррациональным числом.

Иррациональными также являются числа $\sqrt{3}$ = 1,73205…, $\sqrt{5}$ = 2,236067…, lg2 = 0,301029995…, π = 3,1415926… (π — отношение длины окружности к диаметру) и другие.

Определение 2. Множество всех конечных и бесконечных десятичных дробей называется множеством действительных чисел, а каждая такая дробь называется действительным числом.

Для обозначения множества действительных чисел используются буква R.

Заметим, что множество всех рациональных чисел Q является подмножеством множества R всех действительных чисел. Также заметим, что при записи действительных чисел в виде бесконечных десятичных дробей не используют дроби с девяткой в периоде, т.к. всякая бесконечная десятичная дробь с девяткой в периоде может быть записана в виде конечной десятичной дроби.

Например: 3,12(9) = 3,13; 0,(9) = 1,0 = 1.

Итак, если множество рациональных чисел пополнить новыми числовыми объектами — иррациональными числами, то получится множество действительных чисел. Заметим, что в отличие от довольно простых способов расширения множества натуральных чисел до множества целых чисел и множества целых чисел до множества рациональных, метод расширения (или пополнения) множества всех рациональных чисел до множества всех действительных чисел оказывается более сложным и основан на использовании понятий математического анализа. Математически строгая теория действительных чисел была развита лишь в середине XIX в. в трудах Р. Дедекинда и Г. Кантора.

Для сравнения действительных чисел и выполнения действий над ними бесконечные десятичные дроби заменяют конечными десятичными дробями. Для этого необходимо ввести понятия приближенного значения действительного числа по избытку и недостатку.

Пусть $x = a_0 a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \dots$ — некоторое положительное действительное число. Тогда число $x_n = a_0 a_1 a_2 \dots a_n$ называется n-м десятичным приближением числа x с недостатком с точностью до 10^{-n}, а число $x'_n = a_0 a_1 a_2 \dots a_n + 10^{-n}$ называется n-м десятичным приближением с избытком с точностью до 10^{-n}.

Например, для числа $\sqrt{2} = 1{,}41421356\dots$ числа 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 являются десятичными приближениями с недостатком соответственно с точностью до 1, до 0,1, до 0,01, до 0,001, до 0,0001, а числа 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143 являются десятичными приближениями с избытком соответственно с точностью до 1, до 0,1, до 0,01, до 0,001, до 0,0001.

Таким образом, любое десятичное приближение числа x с недостатком не больше числа x, а любое десятичное приближение с избытком не меньше числа x.

Используя десятичные приближения с недостатком и с избытком, можно оценить точность приближенных вычислений с действительными числами. Как это делается, покажем на примере.

Пример. Найти приближенно сумму чисел π = 3,14… и $\sqrt{2}$=1,41… и оценить точность полученного приближения.

Решение.

$$\pi + \sqrt{2} \approx 3{,}14 + 1{,}41,$$
$$\pi + \sqrt{2} \approx 4{,}55.$$

Оценим точность этого приближенного равенства.

$$3{,}14 \le \pi \le 3{,}15,$$
$$1{,}41 \le \sqrt{2} \le 1{,}42.$$

Сложим почленно эти неравенства. Получим

$$4{,}55 \le \pi + \sqrt{2} \le 4{,}57.$$

Отсюда следует, что

$$0 \le \left(\pi + \sqrt{2}\right) - 4{,}55 \le 4{,}57 - 4{,}55 = 0{,}02$$
$$0 \le 4{,}57 - \left(\pi + \sqrt{2}\right) \le 4{,}57 - 4{,}55 = 0{,}02,$$

Говорят, что $\pi + \sqrt{2} \approx 4{,}55$ и $\pi + \sqrt{2} \approx 4{,}57$ с точностью до 0,02. Число 4,55 является приближением с недостатком, а число 4,57 — приближением с избытком суммы $\pi + \sqrt{2}$ с точностью до 0,02.

Более точное приближение суммы $\pi + \sqrt{2}$ дает среднее арифметическое найденных приближений с недостатком и с избытком.

$$\pi + \sqrt{2} \approx 4{,}56 \text{ с точностью до } 0{,}01.$$

В этом случае можно записать так: $\pi + \sqrt{2} = 4{,}56 \pm 0{,}01$.

Ответ: $\pi + \sqrt{2} = 4{,}56 \pm 0{,}01$.

Отметим тот факт, что множество иррациональных чисел не обладает свойством замкнутости относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления. Чтобы убедиться в этом, достаточно указать одну пару иррациональных чисел, сумма, например, которых рациональна. Рассмотрим два иррациональных числа 0,1010010001… и 0,0101101110… Сумма этих чисел будет числом рациональным, десятичное представление которого имеет вид

$$0{,}11111 \ldots 1 \ldots = 0,(1) = \frac{1}{9}.$$

Приведем пример произведения иррациональных чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4.$$

Число 4 рационально. Одного примера достаточно, чтобы утверждать, что множество иррациональных чисел не замкнуто относительно операции умножения. И это несмотря на то, что можно привести сколько угодно примеров, в которых сумма, разность, произведение или частное иррациональных чисел есть число иррациональное.

Также заметим, что сумма, разность, произведение или частное иррационального числа и рационального есть всегда иррациональное число.

В заключении обратим внимание на геометрическое изображение множества действительных чисел. Для этого рассмотрим на плоскости некоторую прямую с зафиксированной точкой *O* (начальная точка). Справа от точки *O* выберем точку *A*, отрезок *OA* примем за единичный отрезок. Луч *OA* (рис. 1) называется положительной полуосью, а противоположный луч — отрицательной полуосью.

Прямая, на которой выбраны начальная точка и единичный отрезок, указано положительное направление, называется координатной осью или координатной прямой.

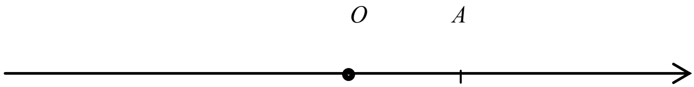


Рис. 4

Каждой точке координатной прямой можно поставить в соответствие действительное число, причем начальной точке *O* соответствует число $x = 0$, точке *A* — число $x = 1$. Тогда любой точке *M*, принадлежащей положительной полуоси, соответствует число $x = |OM|$, а точке *M*, принадлежащей отрицательной полуоси, соответствует число $x = -|OM|$, где $|OM|$ — длина отрезка OM, измеряемого при помощи единичного отрезка OA.

Число, соответствующее точке координатной прямой, называется координатой этой точки. Каждая точка координатной прямой имеет единственную координату и наоборот, каждое действительное число является координатой единственной точки координатной прямой. Говорят, что между точками координатной прямой и множеством R действительных чисел, установлено взаимно однозначное соответствие. Поэтому множество R часто называют числовой прямой. Множество R можно обозначить бесконечным промежутком $(-\infty; +\infty)$. В отличие от множества рациональных чисел, множество действительных чисел обладает особым свойством — свойством непрерывности. Геометрическая интерпретация этого свойства означает, что при изображении действительных чисел точками на координатной прямой вся прямая будет заполнена ими без пробелов.

7. Выражения с переменными. Тождества. Формулы сокращенного умножения

Рассмотрим запись, состоящую из цифр, буквы и знаков действий:

$$3a + 6.$$

Подставляя вместо буквы a разные числа, будем получать различные числовые выражения:

Если $a = 1$, то $3 \cdot 1 + 6$;

если $a = 2$, то $3 \cdot 2 + 6$;

если $a = 5$, то $3 \cdot 5 + 6$ и т. д.

В записи $3a + 6$ буква a называется переменной, а сама запись $3a + 6$ — выражением с переменной.

Определение 1. Выражение, содержащее переменную и обращающееся в числовое выражение при замене переменной ее значением, называется выражением с переменной.

Выделяют выражения с одной, двумя, тремя и более переменными. Так запись $3x - y$ является выражением с двумя переменными, а запись $3a + 6b - 2c$ — выражением с тремя переменным. Для обозначения переменной можно использовать любую строчную букву латинского алфавита.

Вместо переменных в выражение можно подставлять только такие ее значения, при которых получаются числовые выражения, имеющие смысл.

Определение 2. Множество значений переменных, при которых выражение имеет смысл, называют областью определения этого выражения.

Рассмотрим примеры:

1) Переменная a в выражении $3a + 6$ может принимать любые действительные значения, т. к. при любом значении a получаются числовые выражения, имеющие смысл. Говорят, что областью определения выражения $3a + 6$ является все множество R действительных чисел.

2) Выражение $\frac{2x}{x-7}$ при $x = 7$ обращается в числовое выражение, не имеющее смысла. При всех других действительных значениях переменной x получаются имеющие смысл числовые выражения. Значит, область определения данного выражения есть множество всех действительных чисел, кроме числа 7, т. е. $x \in (-\infty;\ 7) \cup (7;\ +\infty)$.

3) Выражение $\sqrt{y-5}$ обращается в числовое выражение, имеющее смысл, тогда и только тогда, когда подкоренное выражение неотрицательно. Следовательно, областью определения данного выражения будет множество всех действительных чисел $y \in [5;\ +\infty)$.

Рассмотрим два выражения с переменной: $2(x+4)$ и $2x + 8$. Области определения этих выражений одинаковы и составляют все множество действительных чисел. Если подставлять вместо x различные действительные числа, то будем получать числовые выражения, значения которых будут равны. Действительно, выражение $2x + 8$ получается из выражения $2(x + 4)$ при раскрытии скобок. Говорят, что выражения $2(x + 4)$ и $2x + 8$ тождественно равны на множестве действительных чисел.

Определение 3. Два выражения с одними и теми же переменными и общей областью определения называют тождественно равными, если при любых значениях переменных их соответствующие значения равны.

Приведем примеры тождественно равных на множестве действительных чисел выражений:

$x + y$ и $y + x$, $x^2 - y^2$ и $(x-y)(x+y)$, $(x+y)^2$ и $x^2 + 2xy + y^2$.

Выражения $\frac{x}{3}$ и $\frac{x^2}{3x}$ не являются тождественно равными на множестве всех действительных чисел, т. к. при $x = 0$ первое выражение имеет смысл, а второе не имеет смысла. Но можно сказать, что эти выражения тождественно равны на множестве всех действительных чисел, кроме нуля.

Определение 4. Переход от одного выражения к другому, тождественно равному ему на данном множестве, называется тождественным преобразованием выражения.

Например, к тождественным преобразованиям относится приведение подобных членов, разложение на множители выражения, приведение дробей к общему знаменателю и т. д.

Два тождественно равных выражения, соединенных знаком равенства, образуют тождество.

Определение 5. Равенство, верное при любых допустимых значениях переменных, называется тождеством.

Примерами тождеств являются законы сложения и умножения действительных чисел (переместительный, сочетательный, распределительный), правила действия с дробями, формулы сокращенного умножения и т. д.

Напомним формулы сокращенного умножения, которые часто используются при тождественных преобразованиях выражений:

1) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$;
2) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$;
3) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$;
4) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;
5) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$;
6) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$;
7) $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

Пример. Разложить на множители выражение $(x^2 - 6)^2 - x^4$.

Решение. Разложим на множители, используя формулу (1) разности квадратов:

$$(x^2 - 6)^2 - x^4 = (x^2 - 6 - x^2)(x^2 - 6 + x^2) = (-6)(2x^2 - 6) =$$
$$= -12(x^2 - 3) = 12(3 - x^2).$$

Таким образом, выражение $(x^2 - 6)^2 - x^4$ может быть тождественно преобразовано в произведение $12(3 - x^2)$.

Ответ: $12(3 - x^2)$.

8. Понятие уравнения с одной переменной. Равносильность уравнений. Решение уравнений с одной переменной

Рассмотрим два выражения, из которых хотя бы одно содержит переменную, и соединим их знаком равенства. Получим предложение, например такое:

$$5x - 9 = 2x. \qquad (1)$$

Если вместо переменной подставлять конкретные числовые значения, то данное предложение будет обращаться в истинное или ложное числовое равенство. Так, при $x = 1$ имеем $5 \cdot 1 - 9 = 2 \cdot 1$ — ложное высказывание, а при $x = 3$ имеем $5 \cdot 3 - 9 = 2 \cdot 3$ — истинное высказывание. Таким образом, предложение (1) является предикатом с одной переменной.

Определение 1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — два выражения с переменной x. Предикат вида $f(x) = g(x)$ называется уравнением с одной переменной.

Выражение $f(x)$ называют левой частью, а выражение $g(x)$ — правой частью уравнения $f(x) = g(x)$.

Определение 2. Решением, или корнем, уравнения с одной переменной называется всякое значение переменной, которое обращает данное уравнение в истинное числовое равенство.

Решить уравнение — это значит найти все его корни, или показать, что корней нет.

При решении уравнений важно учитывать его область определения. Если выражение $f(x)$ определено на множестве X_1, а выражение $g(x)$ — на множестве X_2, то уравнение $f(x) = g(x)$ определено на множестве $X = X_1 \cap X_2$.

Область определения уравнения также называют областью допустимых значений (ОДЗ) переменной *x*.

Можно сказать, что при решении уравнения находится его область истинности, которая всегда является подмножеством его области определения. В случае совпадения области определения и области истинности уравнение обращается в тождество.

При решении уравнений часто требуется преобразование исходного уравнения. Введем основные понятия и выделим правила, которые необходимо учитывать при преобразовании уравнений.

Определение 3. Если любое решение уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ является решением уравнения $f_2(x) = g_2(x)$, то уравнение $f_2(x) = g_2(x)$ является следствием уравнения $f_1(x) = g_1(x)$.

Записать это можно так: $f_1(x) = g_1(x) => f_2(x) = g_2(x)$. Заметим, что уравнение $f_2(x) = g_2(x)$ может иметь корни, не удовлетворяющие уравнению $f_1(x) = g_1(x)$, тогда для последнего эти корни называются посторонними. Таким образом, если при решении уравнения его заменяют уравнением — следствием, то найденные корни необходимо подставить в исходное уравнение. Если при проверке обнаружились посторонние корни, то их надо отбросить.

Определение 4. Два уравнения $f_1\,(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называются равносильными, если у них одно и то же множество решений.

Записать это можно так: $f_1(x) = g_1(x) <=> f_2(x) = g_2(x)$.

Например, уравнения $5x + 1 = 6$ и $2x = 2$ равносильны, т. к. каждое из них имеет единственный корень $x = 1$.

Очевидно, если два уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого.

Если уравнение заменяется уравнением, ему равносильным, то проверка не требуется. Найденные корни будут являться корнями исходного уравнения. Замена одного уравнения другим, ему равносильным и имеющим более простое решение, является основным приемом при решении уравнений.

Сформулируем некоторые теоремы, которые выражают правила преобразований уравнений.

Теорема 1. Если к обеим частям уравнения с областью определения X прибавить одно и то же выражение с переменной, определенное на том же множестве, то получим уравнение, равносильное данному.

$$f(x) = g(x) <=> f(x) + h(x) = g(x) + h(x).$$

Из теоремы 1 вытекают важные следствия:

Следствие 1.1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.

Следствие 1.2. Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части уравнения с областью определения X умножить на одно и то же выражение с переменной, определенное на том же множестве и не обращающееся в нуль ни при каких значениях x из множества X, то получим уравнение, равносильное данному.

$$f(x) = g(x) <=> f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x).$$

Следствие 2.1. Если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Каждое решение уравнения $f(x) \cdot g(x) = 0$ является решением, по крайней мере, одного из уравнений $f(x) = 0$ или $g(x) = 0$.

Пример 1. Решить уравнение $3x^2 - 15x = 0$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители. Для этого вынесем за скобку общий множитель. Затем воспользуемся теоремой 3.

$$3x(x-5) = 0,$$
$$3x = 0 \text{ или } (x-5) = 0,$$
$$x = 0 \quad x = 5.$$

Ответ: 0; 5.

Рассмотрим решение некоторых видов уравнений с одной переменной.

Линейные уравнения. Линейным уравнением называется уравнение первой степени вида $ax + b = 0$, где a и b — некоторые действительные числа.

Решение линейного уравнения находится следующим образом. К обеим частям уравнения $ax + b = 0$ прибавляем число $-b$, получаем уравнение $ax = -b$, равносильное исходному. Разделим обе части последнего уравнения на число на число $a \neq 0$, получим корень уравнения $x = -\frac{b}{a}$.

При условии $a \neq 0$ линейное уравнение всегда имеет единственный корень $x = -\frac{b}{a}$.

Если $a = 0$, то возможны две ситуации. При $a = 0$ и $b \neq 0$ уравнение решений не имеет. При $a = 0$ и $b = 0$ уравнение имеет бесконечное множество решений. Действительно, решением уравнения $0x = 0$ является любое действительное число.

Пример 2. Решить уравнение $5 - 2(x - 1) = 1 - 4x$.

Решение. Раскроем скобки, приведем уравнение к виду $ax + b = 0$, воспользовавшись следствием 1.2.

$$5 - 2x + 2 = 1 - 4x,$$
$$2x = -6,$$
$$x = -3.$$

Ответ: -3.

Квадратные уравнения. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется квадратным уравнением.

Множество решений квадратного уравнения зависит от дискриминанта $D = b^2 - 4ac$:

если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня, которые вычисляются по формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

если $D = 0$, то уравнение имеет два одинаковых действительных корня (один корень кратности 2);

если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Приведем примеры решения уравнений.

Пример 3. Решить уравнение $3x^2 + 5x + 2 = 0$.

Решение. Это квадратное уравнение. Так как $D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$, то данное уравнение имеет два различных действительных корня.

$$x_1 = \frac{-5-1}{2 \cdot 3} = -1 \text{ и } x_2 = \frac{-5+1}{2 \cdot 3} = -\frac{2}{3}.$$

Ответ: $-1; -\frac{2}{3}$.

Пример 4. Решить уравнение $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Решение. Это квадратное уравнение.

Так как $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$, то данное уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: действительных корней нет.

Дробно-рациональные уравнения. Уравнение, приводящиеся к виду $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ выражения с переменной x, в которых над переменной выполняются только действия сложения, вычитания, умножения, деление и возведение в степень, называются дробно-рацио-нальными уравнениями. При решении уравнений данного вида находят корни числителя и проверяют, не обращают ли они в нуль знаменатель. Если при подстановке некоторых корней исходное уравнение оказывается лишенным смысла из-за обращения в нуль знаменателя, то эти корни признаются посторонними и отбрасываются из ответа.

Пример 5. Решить уравнение $\frac{3x}{x-1} - \frac{2x}{x+2} = \frac{3x-6}{(x-1)(x+2)}$.

Решение. Областью определения данного уравнения являются все действительные числа, кроме 1 и -2. Умножим обе части уравнения на выражение $(x-1)(x+2) \neq 0$, получим

$$3x(x+2) - 2x(x-1) = 3x - 6.$$

После тождественных преобразований придем к квадратному уравнению $x^2 + 5x + 6 = 0$. Находим корни этого уравнения: $x_1 = -2$, $x_2 = -3$. Проверкой убеждаемся, что число -3 является корнем исходного уравнения, а число -2 есть посторонний корень, т. к. -2 не входит в область определения уравнения. Действительно, при $x = -2$ знаменатель обращается в нуль и обе части уравнения теряют смысл.

Ответ: -3.

9. Понятие неравенства с одной переменной. Равносильность неравенств. Решение неравенств с одной переменной

Два выражения, из которых хотя бы одно содержит переменную, соединенные знаком «больше» или «меньше», образуют неравенство с переменной.

Так, например, $2x + 7 > 9x; 3x + 5 < 11$ — неравенства с одной переменной x. При подстановке вместо x конкретных значений будем получать числовые неравенства, истинные или ложные. Таким образом, предложения $2x + 7 > 9x; 3x + 5 < 11$ являются высказывательными формами, или предикатами с одной переменной.

Определение. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - два выражения с переменной x. Одноместный предикат вида $f_1(x) > f_2(x)$ или $f_1(x) < f_2(x)$ называется неравенством с одной переменной.

Выражения $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называются соответственно левой и правой частями неравенства. Область определения X предиката будем называть областью определения неравенства.

Определение. Решением неравенства с одной переменной называется всякое значение переменной, которое обращает неравенство в истинное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти все множество его решений. Другими словами, решить неравенство — значит найти область истинности T данного предиката.

Если $T = X$, т. е. неравенство справедливо при всех $x \in X$, то говорят, что оно выполняется тождественно, и называют его тождественным неравенством.

Например, $x + 3 > x; 1 + \sqrt{x^2} > x$ — тождественные неравенства.

Равносильность неравенств

При решении неравенств наиболее часто используется прием замены одного неравенства другим, более простым, но имеющим те же решения. В основе таких преобразований лежит понятие равносильности неравенств.

Определение. Два неравенства $f_1(x) > f_2(x)$ и $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$, рассматриваемые на множестве X, называются равносильными, если множества их решений равны.

Например, неравенства $10x - 3 > 2 + 6x$ и $4x > 5$ равносильны, т. к. их множества решений равны и составляют промежуток $(1\frac{1}{4}; +\infty)$.

Определение. Неравенство $\varphi_1(x > \varphi_2(x)$ называется следствием неравенства $f_1(x) > f_2(x)$, если каждое решение неравенства $f_1(x > f_2(x)$, является решением неравенства $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$.

Неравенства $f_1(x) > f_2(x)$ и $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$ равносильны в том и только в том случае, когда каждое из них является следствием другого.

Теорема. Пусть неравенство $f_1(x) > f_2(x)$ задано на множестве X и $g(x)$ — выражение, определенное на том же множестве. Тогда неравенства $f_1(x) > f_2(x)$ и $f_1(x)\, g(x) > f_2\,(x)\, g(x)$ равносильны на множестве X.

Теорема. Если к обеим частям неравенства с областью определения X прибавить одно и то же выражение с переменной, определенное на том же множестве X, то получим новое неравенство, равносильное данному.

Из этой теоремы вытекают следствия, часто используемые при решении неравенств.

Следствие. Если к обеим частям неравенства $f_1(x) > f_2(x)$ прибавить одно и то же число d, то получим неравенство $f_1(x) + d > f_2(x) + d$, равносильное данному.

Следствие. Если какое-либо слагаемое перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема. Пусть неравенство $f_1(x) > f_2(x)$ задано на множестве *X* и $g(x)$ — выражение, определенное на том же множестве, и для всех $x \in X$, $g(x) > 0$. Тогда неравенства $f_1(x) > f_2(x)$ и $f_1(x)\,g(x) > f_2(x)\,g(x)$ равносильны на множестве *X*.

Теорема. Если обе части неравенства с областью определения *X* умножить на одно и то же выражение с переменной, определенное на том же множестве *X* и большее нуля для всех значений *x* из множества *X*, то получим новое неравенство, равносильное данному.

Из этой теоремы также вытекает следствие.

Следствие. Если обе части неравенства умножить (или разделить) на одно и то же положительное число, то неравенство не изменится.

Теорема. Пусть неравенство $f_1(x) > f_2(x)$ задано на множестве *X* и *g(x)* — выражение, определенное на том же множестве, и для всех $x \in X$, $g(x) < 0$. Тогда неравенства $f_1(x) > f_2(x)$ и $f_1(x)\,g(x) < f_2(x)\,g(x)$ равносильны на множестве *X*.

Следствие. Если обе части неравенства умножить (или разделить) на одно и то же отрицательное действительное число, то знак неравенства изменится на противоположный.

Все сказанное о неравенствах вида $f_1(x) > f_2(x)$ распространяется и на неравенства $f_1(x) < f_2(x)$, $f_1(x) \geq f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$.

Решение неравенств с одной переменной

Рассмотрим решение некоторых видов неравенств с одной переменной.

Линейные неравенства. Неравенством первой степени *с* одной переменной, или линейным неравенством с одной переменной, называется неравенство вида: $a_1x + b_1 > a_2x + b_2$, где a_1, b_1, a_2, b_2 — постоянные действительные числа, причем $a_1 \neq a_2$.

Вместо знака > в неравенстве может стоять любой из знаков: $<, \leq, \geq$.

Для решения неравенства перенесем с противоположными знаками слагаемое a_2x в левую, а слагаемое b_1, в правую части неравенства. В результате получим неравенство $(a_1 - a_2)\,x > b_2 - b_1$, которое после введения новых обозначений запишется в виде

$$ax > b.$$

Если $a > 0$, то делением обеих частей неравенства на a получим $x > \frac{b}{a}$, т. е. решением неравенства является любое действительное число, большее чем $\frac{b}{a}$. Множество решений представляет собой интервал $(\frac{b}{a};\ +\infty\ )$ (рис. 5).

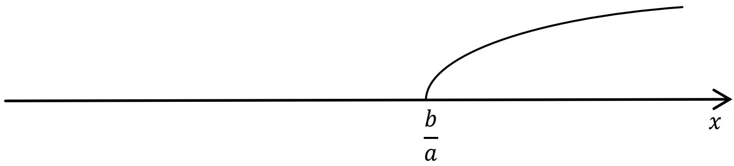


Рис. 5

Если $a <\ 0$, то, разделив обе части неравенства $ax > b$ на a и поменяв знак неравенства на противоположный, получим $x < \frac{b}{a}$. В этом случае решением нашего неравенства является любое действительное число, меньшее, чем $\frac{b}{a}$. Множество всех решений есть бесконечный интервал $\left(-\infty;\ \frac{b}{a}\right)$ (рис. 6).

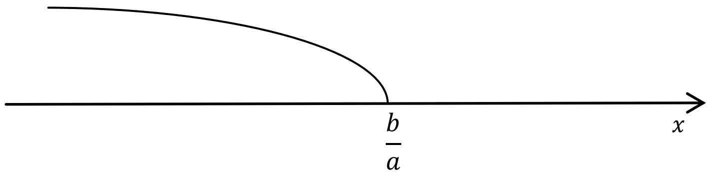


Рис. 6

Если $a = 0$ и $b < 0$, то решением неравенства $ax > b$ является любое действительное число, а множество всех решений есть множество R всех действительных чисел.

При $a = 0$ и $b > 0$ неравенство $ax > b$ не имеет решений.

При решении неравенств $ax < b;\ ax \geq b;\ ax \leq b$ рассуждения проводятся аналогично.

Квадратные неравенства. Неравенством второй степени с одной переменной, или квадратным неравенством, называется неравенство вида: $a_1x^2 + b_1x + c_1\ > a_2x^2 + b_2x + c_2$, где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2\ , c_2$ — постоянные действительные числа, причем $a_1 \neq a_2$.

Вместо знака > в неравенстве может стоять любой из знаков: $<, \leq, \geq$.

После несложных преобразований и введения новых обозначений это неравенство приводится к виду: $ax^2 + bx + c > 0$.

Выражение $ax^2 + bx + c$ называется квадратным трехчленом.

Будем считать, что $a > 0$. Этого всегда легко можно добиться умножением обеих частей неравенства на –1 и изменением знака неравенства на противоположный. Тогда возможны несколько случаев:

1. Если $D > 0$, то трехчлен имеет два различных корня x_1 и x_2 (рис. 7). $ax^2 + bx + c > 0$ в интервалах $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$.

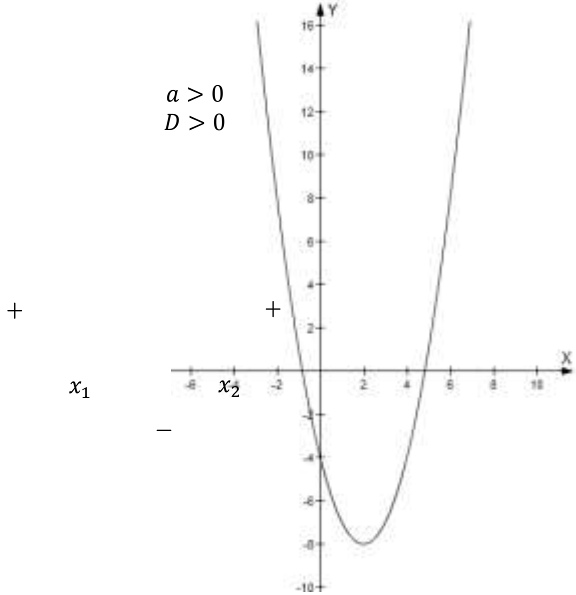


Рис. 7

2. Если $D = 0$, то трехчлен имеет два равных корня $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ (рис. 8). $ax^2 + bx + c > 0$ в интервалах $(-\infty; -\frac{b}{2a})$ и $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$.

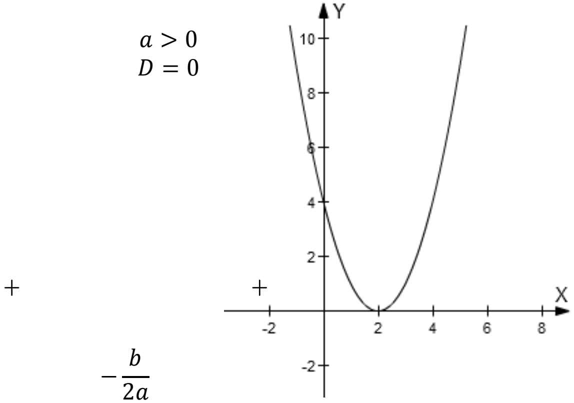


Рис. 8

3. Если $D < 0$, то трехчлен не имеет действительных корней и при всех значениях x сохраняет знак старшего коэффициента a, т. е. $ax^2 + bx + c > 0$ тождественно (рис.9).

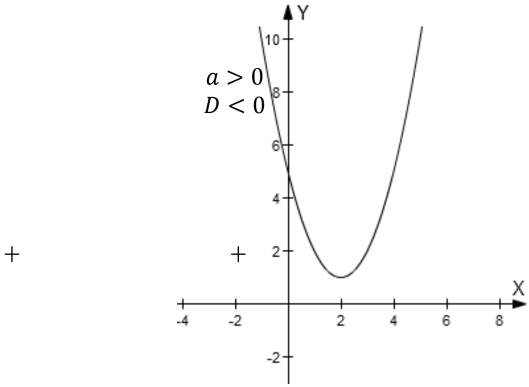


Рис. 9

Теперь рассмотрим неравенство $ax^2 + bx + c < 0$, где $a > 0$.

1. Если $D > 0$, то неравенство выполняется в интервале $(x_1; x_2)$ (рис. 10).

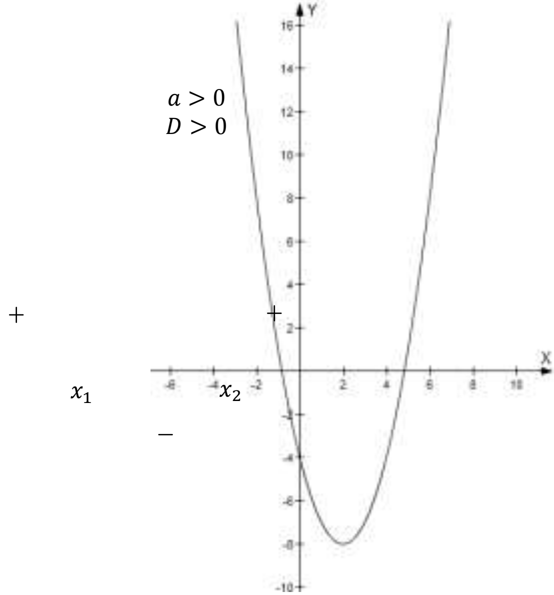


Рис. 10

2. Если $D = 0$, то неравенство не выполняется ни при каком значении x (рис. 11).

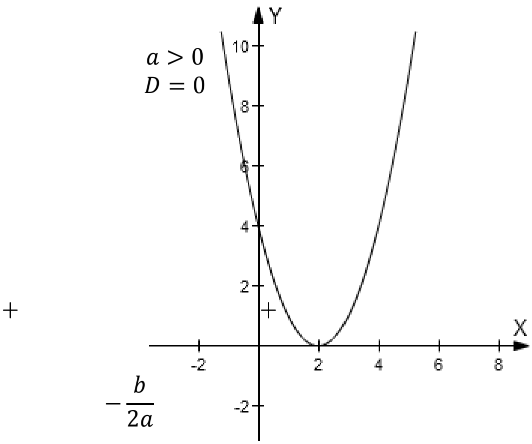


Рис. 11

3. Если $D < 0$, то неравенство также не выполняется ни при каком значении x (рис. 12).

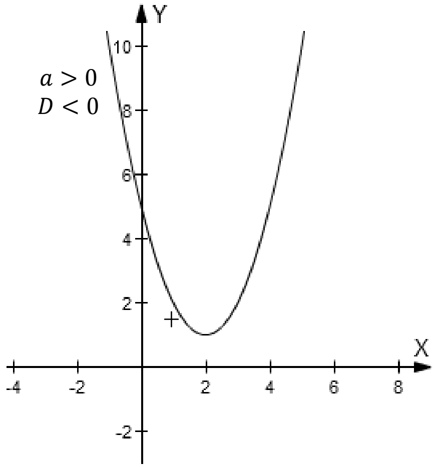


Рис. 12

Пример 1. Решить неравенство $2x^2 + 3x - 2 > 0$.

Решение. $a = 2 > 0$; $D = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25 > 0$;

$$x_1 = -2;\ \ x_2 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, данное неравенство выполняется на объединении интервалов $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{2}.; +\infty\right)$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{2}.; +\infty\right)$.

Пример 2. Решить неравенство $-3x^2 + 5x - 4 > 0$.

Решение. Поскольку коэффициент при *x* отрицателен, умножим обе части неравенства на число -1, изменив при этом знак неравенства на противоположный. Получим неравенство $3x^2 - x + 4 < 0$, в котором коэффициент при x^2 положителен. Далее найдем дискриминант $D = b^2 - 4ac = 25 - 48 = -23 < 0$. Значит, неравенство не имеет решений.

Ответ: Решений нет.

Метод интервалов. Для решения неравенств с одной переменной более высоких степеней применяют прием, называемый методом интервалов. Этот метод заключается в следующем.

Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ и $q_1(x), q_2(x), \ldots\ q_l(x)$, — выражения, содержащие переменную *x* в первой степени, определены на всей числовой прямой и обращаются в нуль в различных точках. Занумеруем точки, в которых эти выражения обращаются в нуль, в порядке возрастания: $a_1 < a_2, \ldots, a_{k+l}$. Таким образом, в каждой из этих точек одно из указанных выражений обращается в нуль, и при этом $a_1 < a_2 < a_{k+l}$. Эти точки разбивают числовую прямую на $k + l + 1$ интервалов:

$$(-\infty; a_1), (a_1; a_2), (a_2; a_3), \ldots, (a_{k+l-1}; a_{k+l}), (a_{k+l}; +\infty).$$

Выражение $\frac{f_1(x) f_2(x) \ldots f_k(x)}{q_1(x) q_2(x) \ldots q_l(x)}$, очевидно, сохраняет постоянный знак на каждом из этих интервалов, а при переходе от каждого интервала к следующему меняет знак на противоположный. Это обстоятельство составляет основу метода интервалов и часто применяется при решении неравенств.

Иногда приходится рассматривать более сложное выражение, имеющее вид:

$$\frac{(f_1(x))^{n_1} (f_2(x))^{n_2} \ldots (f_k(x))^{n_k}}{(q_1(x))^{m_1} (q_2(x))^{m_2} \ldots (q_l(x))^{m_l}},$$

где $n_1, n_2, \ldots n_k, m_1, m_2, \ldots m_l$ — натуральные числа. Исследование знака такого выражения также не представляет труда. Если n_1 — четное число, то выражение $(f_1(x))^{n_1}$ положительно всюду, кроме точки, в которой оно обращается в нуль, и поэтому при определении знака всего выражения может не учитываться. Если же число n_1 нечетно, то выражение $(f_1(x))^{n_1}$ имеет тот же знак, что и $f_1(x)$. Аналогично можно рассмотреть и другие множители в числителе и знаменателе. Поэтому при определении знака выражения нужно учитывать лишь множители, имеющие нечетные показатели.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} < 0$.

Решение. Разложим числитель и знаменатель на множители. Для этого найдем корни квадратного трехчлена, стоящего в числителе. Очевидно, это будут числа 1 и 2, и тогда $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Аналогично, числа 3 и 4 будут корнями квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, и, следовательно, $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$.

Неравенство можно переписать в виде $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}<0$. Последнее неравенство решим методом интервалов. Для этого на числовой прямой отметим точки: 1, 2, 3, 4, при переходе через которые выражение, стоящее в левой части, меняет знак на противоположный. Через отмеченные точки проведем «кривую знаков», т. е. волнообразную линию, начиная справа сверху, как показано на рис. 13.

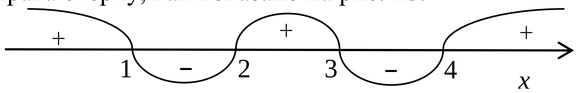


Рис. 13

Вся числовая прямая разбилась на 5 промежутков. Самый первый из них $(4; +\infty)$ будет положительным, отметим его знаком +. Далее знаки в промежутках чередуются.

Те промежутки, на которых выполняется неравенство
$\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} > 0$, помечены знаком +, а те промежутки, на которых
$\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} < 0$, знаком –.

Ответ: $(1;\ 2) \cup (3;\ 4)$.

Пример 4. Решить неравенство $\frac{(x-1)(x-2)(x+2)^3x^2}{(x-1)(x+1)(x-3)^4} \geq 0$.

Решение. В левую часть неравенства входит множитель $(x+2)^3$. Знак выражения не изменится, если его заменить множителем $(x+2)$. Кроме того, множитель $(x-1)$ входит в числитель и знаменатель дроби, а значит, при переходе через точку $x = 1$ выражение не изменит знака. Множители x^2 и $(x-3)^4$ всегда положительны, кроме точек $x = 0$ и $x = 3$, где они обращаются в нуль. Таким образом, при переходе через эти точки выражение, стоящее в левой части неравенства, тоже не изменит знака.

Теперь на числовой прямой отметим точки, в которых левая часть неравенства обращается в нуль или не имеет смысла. Это будут точки: –2; –1; 0; 1; 2; 3. При переходе через 0; 1; 3 выражение, стоящее в левой части неравенства, не меняет знак, а (при переходе через точки: –2; –1; 2 знак меняется на противоположный. Учитывая все это, проводим кривую знаков, как показано на рис. 14.

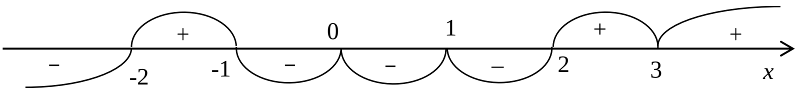


Рис. 14

Поскольку неравенство содержит знак $\geq$, то при записи ответа необходимо учесть точки, в которых выражение, стоящее в левой части неравенства, обращается в нуль.

Ответ: $[-2;\ 1) \cup \{0\} \cup [2;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

10. Понятие системы уравнений. Элементарные методы решения систем уравнений

Определение 1. Уравнение может содержать не одну, а две переменных и более. Такие уравнения называются уравнениями с несколькими переменными.

Определение 2. Если уравнения $f_k(x_1, x_2, \dots \mathrm{x}_n) = \varphi_k(x_1, x_2, \dots x_n)$, $k = 1,2, \dots\dots, m (m \geq 2)$, где $x_1, x_2, \dots x_n$ - неизвестные, рассматриваются совместно, то говорят, что дана система m уравнений с n неизвестными $(x_1, x_2, \dots x_n) = x$ и записывают

$$\begin{cases} f_1(x) = \varphi_1(x) \\ f_2(x) = \varphi_2(x) \\ \dots\dots\dots \\ f_m(x) = \varphi_m(x) \end{cases}.$$

Классификацию систем проводят по числу и характеру уравнений, входящих в систему.

Например,

$$\begin{cases} \sqrt{x_1} + x_2 = 2 \\ x_2^2 - x_1 x_2 = 5 + x_3 \end{cases} —$$

алгебраическая система двух уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3 (одно уравнение — иррациональное, другое — рациональное).

Определение 3. Решением системы уравнений называется такой набор n чисел $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_n^{(0)}$, которые при подстановке в систему соответственно на место неизвестных $x_1, x_2, \dots x_n$ обращают все уравнения этой системы в верные числовые равенства (удовлетворяют всем уравнениям системы одновременно). Подчеркнем, что числа $x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, составляют одно решение (а не n решений).

Определение 4. Допустимыми значениями неизвестных называют их числовые значения, при которых все функции $f_k(x)$ и $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, входящие в систему уравнений, одновременно имеют смысл.

Определение 5. Решить систему — значит найти множество всех ее решений или показать, что она решений не имеет. Если система не имеет решений, то говорят, что она *противоречивая* или *несовместная*.

Определение 6. Если две системы имеют одни и те же решения или если обе решений не имеют, то они называются *равносильными* (*эквивалентными*). Аналогично определяются уравнение, равносильное совокупности систем уравнений, и две равносильные совокупности систем уравнений, в том числе относительно некоторого множества M (на множестве M).

Если уравнение и система уравнений содержат параметры, то необходимо также исследовать зависимость полученных решений от параметров на множестве допустимых значений переменных. В противном случае полученные ответы для некоторых значений параметров могут оказаться просто неверными.

Основные методы решения системы уравнений

1. Решение методом подстановки

Суть в том, что в системе уравнений выбираем наиболее простое, в котором одну переменную выражаем через другую. Результат подставляем во второе уравнение, благодаря чему преобразуем его в более простое уравнение с одной переменной. Вычисляем это уравнение и получаем значение одной из переменных. Подставляем его в первое уравнение и получаем значение второй переменной.

Пример. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

Решение.

Первое уравнение системы проще второго — его и используем.

Выразим в нем x через y:

$$x = 1 - y.$$

Подставляем это значение x во второе уравнение и находим значение y:

$$2(1 - y) - y = 2$$
$$2 - 2y - y = 2$$

$$2 - 3y = 2$$
$$3y = 2 - 2$$
$$3y = 0$$
$$y = 0.$$

Подставляем найденное значение y в первое уравнение и находим теперь значение x:

$$x + 0 = 1$$
$$x = 1.$$

Ответ: $x = 1, y = 0$.

2. Решение методом сложения

Этот метод целесообразно применять, если при сложении одно из неизвестных пропадает.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}.$$

Решение.

Сложим (вычтем) почленно оба уравнения системы:

$$\begin{cases} (x + y) + (x - y) = 5 + 1 \\ (x + y) - (x - y) = 5 - 1 \end{cases}.$$

Раскрываем скобки в обоих уравнениях и сводим подобные члены. В результате в первом уравнении пропадает y, во втором x. Получаем уравнения с одной переменной, которые проще решать:

$$\begin{cases} x + y + x - y = 6 \\ x + y - x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Пример решен.

Необязательно производить взаимное сложение и вычитание двух уравнений системы. Часто достаточно бывает произвести одно из двух действий, чтобы вычислить значение одной из двух переменных. А зная одну переменную, уже можно найти и вторую.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 4y = 26 \\ 8x + 4y = 44 \end{cases}.$$

В обоих уравнениях есть число $4y$. Значит, можем применить метод сложения. Вычтем из первого уравнения второе, чтобы $4y$ исчезло и чтобы в результате получаем уравнение с одной переменной:

$$2x + 4y - 8x - 4y = 26 - 44.$$
$$-6x = -18$$
$$x = -18 : (-6)$$
$$x = 3.$$

Теперь можем найти и значение y, подставив значение x в любое из двух уравнений системы:

$$2 \cdot 3 + 4y = 26$$
$$6 + 4y = 26$$
$$4y = 20$$
$$y = 20 : 4$$
$$y = 5.$$

Ответ: $x = 3, y = 5$.

Пример 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 5y = 21 \\ 8x - 3y = 7 \end{cases}.$$

Здесь нет переменных с одинаковыми коэффициентами, чтобы при вычитании они исчезли. Что делать в этом случае? Для таких случаев придумано оригинальное решение: умножим почленно первое уравнение на 3, а второе на 5. От этого истина не пострадает, потому что получим равносильные уравнения. Благодаря этому приему появятся одинаковые переменные $15y$:

$$\begin{cases} (3x + 5y = 21) \cdot 3 \\ (8x - 3y = 7) \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 3x + 3 \cdot 5y = 3 \cdot 21 \\ 5 \cdot 8x - 5 \cdot 3y = 5 \cdot 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 9x + 15y = 63 \\ 40x - 15y = 35 \end{cases}$$

Итак, появились одинаковые переменные и можно сложить два уравнения, чтобы прийти к уравнению с одной переменной:

$$9x + 15y + 40x - 15y = 63 + 35$$
$$49x = 98$$
$$x = 2.$$

Осталось найти значение второй переменной, подставив значение x, например, в первое уравнение системы:

$$3 \cdot 2 + 5y = 21$$
$$6 + 5y = 21$$
$$5y = 21 - 6$$
$$5y = 15$$
$$y = 3.$$

Ответ: $x = 2; y = 3$.

Опять же не всегда нужно преобразовывать оба уравнения системы так, как было в предыдущем примере. Бывает и так, что достаточно изменить лишь одно из уравнений.

Пример 4. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ x + 3y = 11. \end{cases}$$

Здесь достаточно второе уравнение умножить на –3. Тогда получим число $-3x$, а при сложении двух уравнений придем к уравнению с одной переменной.

Итак, умножаем второе уравнение на –3:

$$(x + 3y = 11) \cdot (-3)$$

$$-3x - 9y = -33.$$

Теперь складываем два уравнения, приходим к уравнению с одной переменной *y* и решаем его:

$$3x - 4y - 3x - 9y = 7 - 33$$

$$-13y = -26$$

$$y = 2.$$

И находим значение *x*. Это проще сделать во втором уравнении:

$$x + 3 \cdot 2 = 11$$

$$x + 6 = 11$$

$$x = 5.$$

Ответ: $x = 5$; $y = 2$.

3. Решение методом введения новой переменной

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-3y} + \dfrac{3}{2x+y} = 2 \\ \dfrac{8}{x-3y} - \dfrac{9}{2x+y} = 1. \end{cases}$$

Дана система сложных уравнений, осложненных дробными числами, которые надо упростить их, чтобы потом решить. Если применить какой-нибудь из первых двух методов, получатся еще более сложные уравнения. Хорошо подходит метод введения новой переменной, благодаря которому целую дробь можно заменить одной переменной.

Обратите внимание: у первых чисел обоих уравнений одинаковые знаменатели $x - 3y$, при этом их числители делятся на 2. У вторых чисел тоже одинаковые знаменатели $2x + y$, а их числители делятся на 3. Этим и воспользуемся.

1) Выпишем исходную систему уравнений, разложив на множители числители второго уравнения и вынеся их за дробь:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-3y} + \dfrac{3}{2x+y} = 2 \\ 4\dfrac{2}{x-3y} - 3\dfrac{3}{2x+y} = 1. \end{cases}$$

Теперь в обоих уравнениях у нас абсолютно одинаковые первые дроби и абсолютно одинаковые вторые дроби.

2) Заменим эти дроби новыми переменными *a* и *b* следующим образом:

$$\frac{2}{x-3y} = a, \frac{3}{2x+y} = b.$$

Так существенно упрощаем уравнения, которые обретают совсем иной вид:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 4a - 3b = 1. \end{cases}$$

3) Применяем уже известный метод подстановки.

Первое уравнение проще, поэтому сначала выражаем в нем *a* через *b*:

$$a = 2 - b.$$

Подставляем полученное значение *a* во второе уравнение, раскрываем скобки, приводим подобные члены и вычисляем численное значение *b*:

$$4 \cdot (2 - b) - 3b = 1$$
$$8 - 4b - 3b = 1$$
$$8 - 7b = 1$$
$$7b = 8 - 1$$
$$7b = 7$$
$$b = 1.$$

По известному значению b, можно найти и численное значение a. Это проще сделать с помощью первого уравнения:

$$a + b = 2$$
$$a + 1 = 2$$
$$a = 2 - 1$$
$$a = 1.$$

Итак:

$$a = 1,\ b = 1.$$

Вписываем в дроби эти значения *a* и *b*:

$$\frac{2}{x-3y} = 1, \frac{3}{2x+y} = 1.$$

4) Преобразуем эти уравнения: неизвестные — влево, известные — вправо:

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}.$$

5) Решаем эту систему уравнений снова с помощью метода подстановки. Для этого в первом уравнении *x* выражаем через *y*:

$$x = 2 + 3y.$$

Подставляем во второе уравнение и находим *y*:

$$2 \cdot (2 + 3y) + y = 3$$
$$4 + 6y + y = 3$$
$$7y = 3 - 4$$
$$7y = -1$$

$$y = -\frac{1}{7}.$$

И с помощью первого уравнения находим x:

$$x - 3y = 2$$

$$x - 3 \cdot (-\frac{1}{7}) = 2$$

$$x + \frac{3}{17} = 2$$

$$x = 2 - \frac{3}{7}$$

$$x = \frac{11}{7}.$$

Нашли значения x и y в исходной системе уравнений, а значит, решили ее.

Ответ: $x = \frac{11}{7}, y = -\frac{1}{7}$

11. Понятие функции. Способы задания функций. Элементарные функции и их графики

Определение 1. Если каждому значению $x \in X$ поставлен в соответствие по некоторому правилу или закону некоторый элемент $y \in Y, y = f(x)$, то говорят, что на множестве X задана функция $f(x)$ со значениями во множестве Y.

x — независимая переменная (аргумент), y — зависимая переменная (функция). Аргумент не всегда является независимой переменной. Он может зависеть еще от одной или нескольких переменных (сложная функция).

Будем рассматривать только числовые функции, т. е. правила, ставящие в соответствие одному действительному числу другое действительное число.

Определение. $f(x): X \to Y$ (функция отображает множество X во множество Y)

Определение. Областью определения функции называется множество всех значений аргумента, при котором функция имеет смысл и обозначается $D(y)$ или $D(f)$.

Пример. Найти область определения функции: $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

Решение. $9 - x^2 > 0, (3 + \text{x})(3 - x) > 0, 3 < x < 3, D(y) = (-3;\ 3)$.

Определение. Множеством значений функции называется множество значений y, которые соответствуют значениям x из $D(y)$ и обозначается $E(y)$ или $E(f)$.

Способы задания функции

1. Аналитический (с помощью формулы) — наиболее распространенный, указывается формула, с помощью которой можно вычислить $f(x)$ для любого $x \in D(f)$.

Различают явное и неявное задание функции: явное — с помощью формулы $y = f(x)$; неявное — с помощью уравнения $F(x, y) = 0$.

Например: $x^2 - 5y^2 - 1 = 0$, $e^{xy} + \sin x + y^3 = 1$.

Функция может быть задана не одной, а несколькими формулами:

$$y = \begin{cases} 2x + 5, & x < 0 \\ 4, & x = 0 \\ x^2 - 1, & x > 0 \end{cases}.$$

2. Табличный — при исследовании различных явлений природы иногда приходится встречаться с переменными величинами, зависимость между которыми устанавливается опытным путем. В этих случаях на основании полученных данных составляются таблицы, в которых содержатся значения функций, соответствующие различным значениям аргумента. Такой способ называется табличным. Широко используется в технике, естествознании.

Достоинство: с помощью таблицы без вычислений можно найти значение функции, соответствующее нужному значению аргумента.

Недостаток: с помощью заданной таблицы можно найти значение функции, соответствующее только приведенным значениям аргумента. Если множество X бесконечно или велико, то пользоваться этим сложно или тяжело.

3. Графический — пусть на плоскости введена прямоугольная система координат xOy и задано множество точек (x, y), обладающее тем свойством, что на любой прямой, параллельной оси ординат, имеется не более одной точки этого множества. Такое множество точек плоскости определит функцию $y = f(x)$, если абсциссе любой точки этого множества поставим в соответствие ее ординату.

Определение. Графиком функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек (x, y) плоскости, координаты x и y которых связаны соотношением $y = f(x)$ и x принадлежит области определения данной функции.

Если функция задана графически, то областью ее определения является множество абсцисс всех точек графика.

Достоинство: наглядность — по графику можно определить свойства функции. Если задан график функции, то можно найти значение функции, соответствующее любому значению аргумента.

Недостаток: это можно сделать только приближенно, да и сам график на практике бывает неточным.

4. Словесный — с помощью описания соответствия между x и y. Так задается известная в математике функция Дирихле: она равна нулю для всех иррациональных чисел и равна единице для всех рациональных: $D = \begin{cases} 1, x \in Q \\ 0, x \in I \end{cases}$.

Пример. Каждому числу $x > 0$ поставлено в соответствие число 1, каждому $x < 0$ число 1, а числу 0 — число 0: $sign\ x = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$

Четность и нечетность функций

Определение. Функция $y = f(x)$ называется четной, если для любого значения х, взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(x) = f(-x)$.

Например: $y = \cos x$ — четная функция.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если для любого значения х, взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(x) = -f(x)$.

Например, $y = \sin x$, $y = x^3$, $y = x \cdot \cos 2x$ — нечетные функции.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функции, не четные и не нечетные, называются функциями общего вида.

При построении графиков четной и нечетной функций достаточно построить только правую ветвь графика — для положительных значений аргумента. Левая ветвь достраивается симметрично относительно оси *y* для четной функции и симметрично относительно начала координат для нечетной функции.

Большинство функций не являются ни четными, ни нечетными.

Например, $y = x^2 - x$, $y = \sqrt[3]{x-2}$, $y = \sin(3x + 2)$ — функции общего вида.

Периодичность

Определение. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует положительное число *T* (не зависящее от x), такое, что:

1) $x + \mathrm{T}$ и $x - \mathrm{T}$ также входят в область определения функции $\mathrm{y} = f(x)$;

2) для всех х из области определения функции выполняется равенство $f(x) = f(x + \mathrm{T})$;

3) среди всех таких *T* есть наименьшее.

Это наименьшее число T называется периодом функции.

Например, периодическими являются функции $y = \sin x$ (период 2π), $y = \cos x$ (период 2π), $y = tgx$ (период π),$y = ctgx$ (период π).

При построении графика периодической функции достаточно построить часть графика на интервале, равном одному периоду, а затем продолжить его на всю область определения функции.

Нули функции

Определение. Нулем функции называется такое действительное значение x, при котором значение функции равно нулю.

Для того чтобы найти нули функции, следует решить уравнение $f(x) = 0$. Действительные корни этого уравнения являются нулями функции $y = f(x)$ и обратно. Нули функции представляют собой абсциссы точек, в которых график этой функции либо пересекает ось абсцисс, либо касается ее, либо имеет общую точку с этой осью.

Например: функция $y = x^2 - 9x$ имеет нули в точках $x_1 = 0,\ x_2 = 9$.

Функция может и не иметь нулей. Например $y = a^x$.

Монотонность

Определение. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется возрастающей, если для любых значений x_1 и x_2 из множества X, из неравенства $x_1 < x_2$, следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, т. е. функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется возрастающей, если большему значению ее аргумента из области определения соответствует большее значение функции.

Определение. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется убывающей, если для любых значений x_1 и x_2 из множества X, из неравенства $x_1 < x_2$, следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется убывающей, если большему значению ее аргумента из области определения соответствует меньшее значение функции.

Функции этих типов называются строго монотонными.

Определение. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется неубывающей, если для любых значений x_1 и x_2 из множества X, из неравенства $x_1 < x_2$, следует неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$, т. е. функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется возрастающей, если большему значению ее аргумента из области определения соответствует большее или равное значение функции.

Определение. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется невозрастающей, если для любых значений x_1 и x_2 из множества X, из неравенства $x_1 < x_2$, следует неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$, т.

е. функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется убывающей, если большему значению ее аргумента из области определения соответствует меньшее или равное значение функции.

Возрастающая, убывающая, невозрастающая, неубывающая функции называются монотонными функциями.

Пример. $y = x^2$ $\mathrm{D}(x) = R$, $\forall\ x_1, x_2 \in R$ и $x_2 > x_1$, $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1) \cdot (x_2 + x_1)$

1) $R^-, x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$, т. е. $f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow$ $f(x)$ — убывающая.

2) $R^+, x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow$ $f(x)$ — возрастающая.

Ограниченность

Определение. Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X, называют ограниченной снизу, если существует число m, такое, что $m \leq f(x)$ для любого $x \in X$.

Например, функция $y = x^2$ ограничена снизу на всей области существования, так как $x^2 \geq 0$ для любого действительного x.

Определение. Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X, называют ограниченной сверху, если существует число M, такое, что $f(x) \leq M$ для любого $x \in X$.

Например, функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ ограничена сверху на всей области существования, так как $\sqrt{1 - x^2} \leq 1$ для любого $x \in [-1, 1]$.

Определение. Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X, называют ограниченной, если существует число $L > 0$, такое, что $|f(x)| \leq L$ для любого $x \in X$.

Например, функция $y = \sin x$ ограничена на всей области существования, так как $|\sin x| \leq 1$ для любого действительного x.

Про функцию $y = f(x)$ говорят, что она принимает на множестве X наименьшее значение в точке x_0, если $x_0 \in X$ и $f(x_0) \leq f(x)$ для всех $x \in X$.

Говорят также, что функция $y = f(x)$ принимает на множестве X наибольшее значение в точке x_0, если $x_0 \in X$ и $f(x_0) \geq f(x)$ для всех $x \in X$.

Простейшие элементарные функции

Элементарными функциями называются функции, определяемые формулами, содержащими конечное число операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, взятия логарифма, вычисления тригонометрических функций. Для построения графика функции любой сложности нужно твердо знать графики элементарных функций.

1. Линейная функция $y = kx + b$.

Графиком линейной функции является прямая. Этот график удобно строить по двум точкам: точке B с координатами $x = 0, y = b$ и точке A с координатами $y = 0, x = -\frac{b}{k} (k \neq 0)$. Эти точки являются точками пересечения прямой с осями координат (рис. 15).

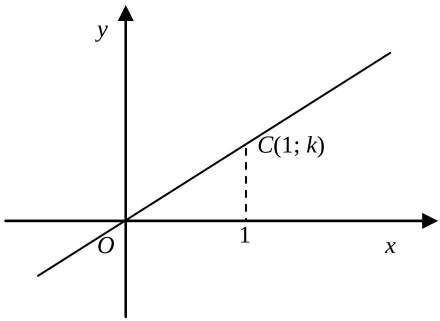


Рис. 15

В случае, если $b = 0$, то прямая проходит через начало координат и для построения графика следует взять одну точку, например точку $C(1;\ k)$ (рис. 16).

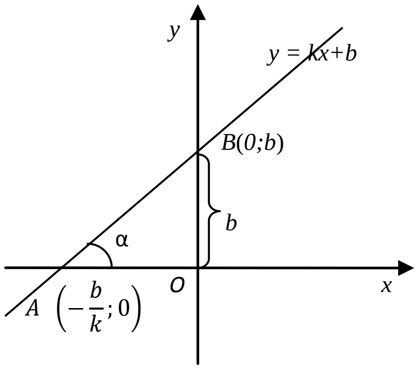


Рис. 16

В случае, если $k = 0$, то прямая параллельна оси абсцисс. Коэффициенты k и b в уравнении прямой имеют наглядное геометрическое толкование. Значение коэффициента b определяет отрезок, отсекаемый графиком линейной функции на оси ординат, а коэффициент k является тангенсом угла a, образованного осью абсцисс и прямой; угол отсчитывается от положительного направления оси абсцисс против часовой стрелки.

Уравнение прямой может быть представлено в различных видах:

$y = y_0 + k(x - x_0)$ — уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$;

$\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$— уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_0(x_0; y_0)$;

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ — уравнение прямой в отрезках.

2. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$.

Графиком квадратичной функции является парабола с осью симметрии, параллельной оси ординат, и вершиной в точке C с координатами $x_C = \frac{b}{2a}$, $y_C = \frac{4ac-b^2}{4a}$ (рис. 17). Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, а если $a < 0$, то вниз (рис. 18). График пересекает ось ординат в точке $B(0; c)$. Функция имеет не более двух нулей.

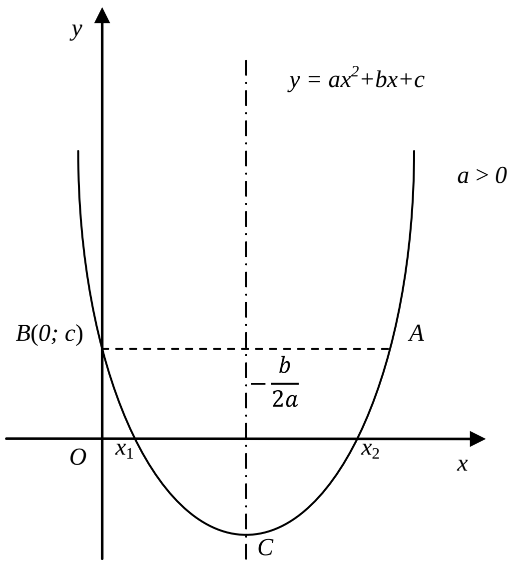


Рис. 17

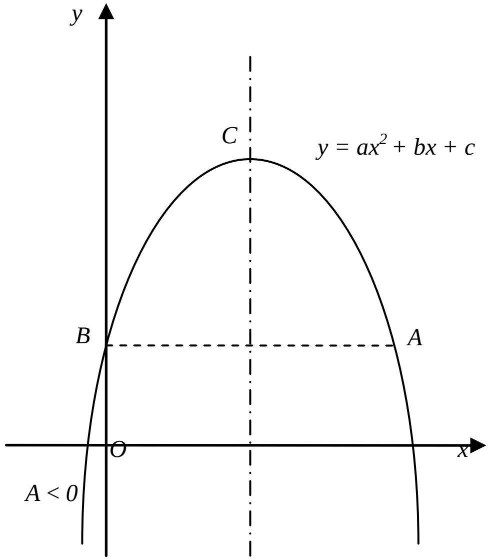


Рис. 18

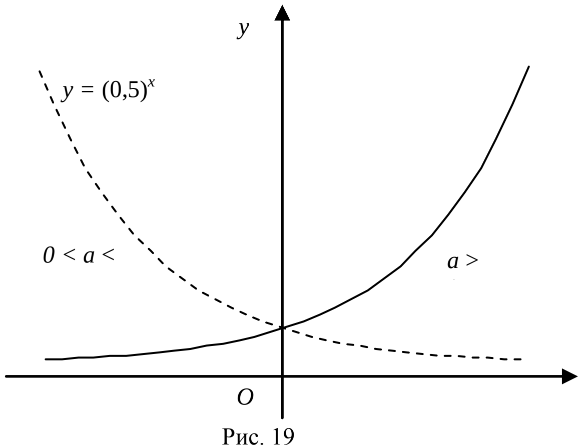


Рис. 19

3. Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0;\ \ a \neq 1)$ (рис. 19).

При $a > 1$ функция монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывает.

4. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ (рис. 20).

При $a > 1$ функция монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывает.

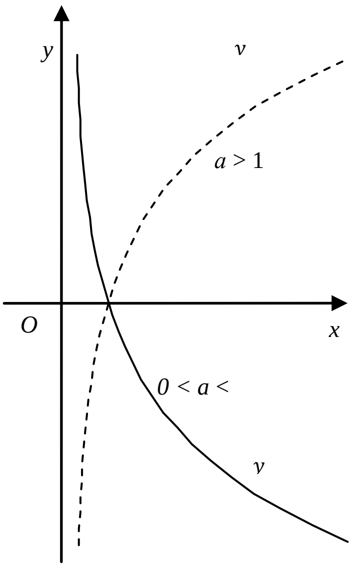


Рис. 20

Тригонометрические функции

$y = \sin x$ (рис. 21), $y = \cos x$(рис. 22), $y = tgx$ (рис. 23), $y = ctgx$ (рис. 24).

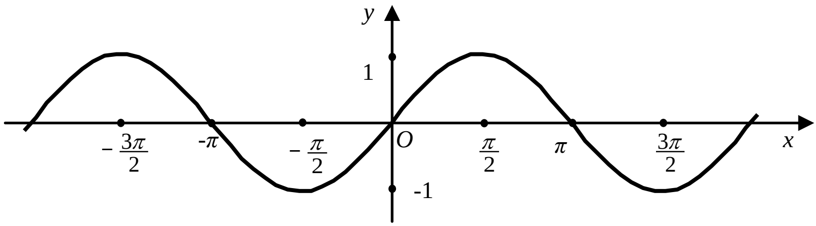


Рис. 21

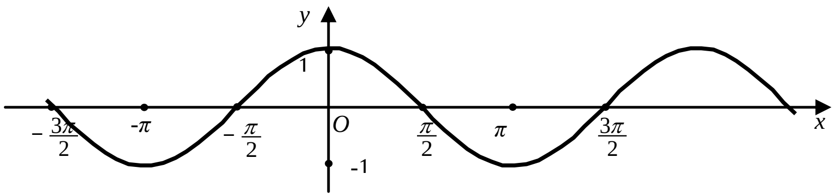


Рис. 22

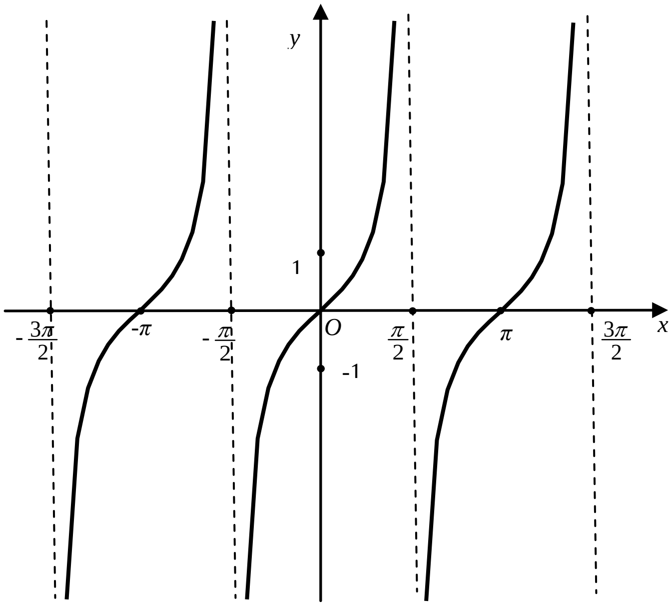

y
1
-1
O
x
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$

Рис. 23

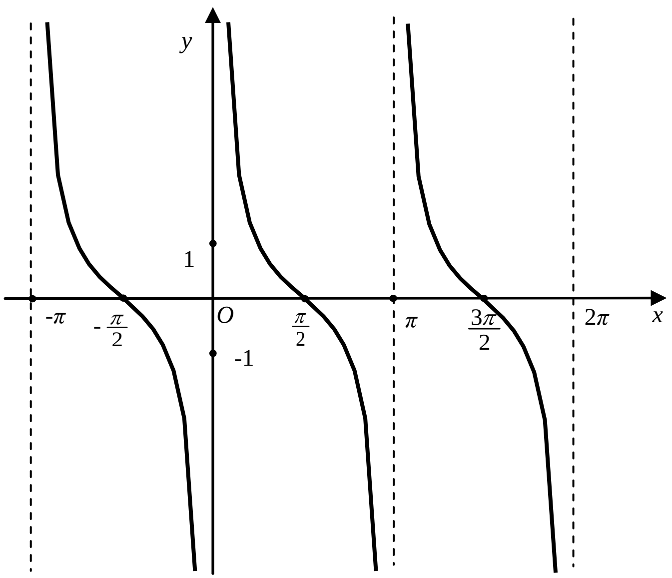

y
1
-1
O
x
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π

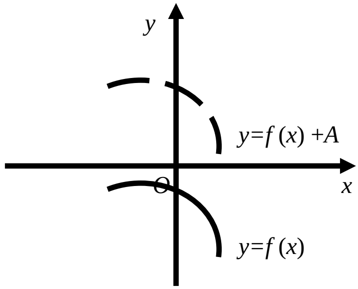
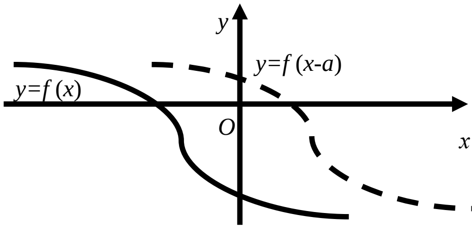
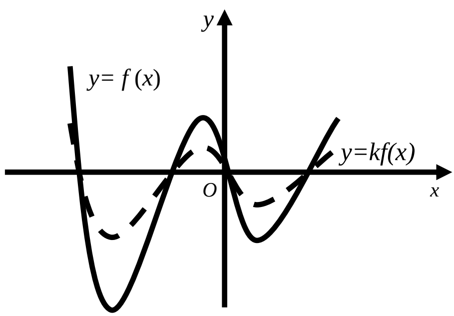
Рис. 24

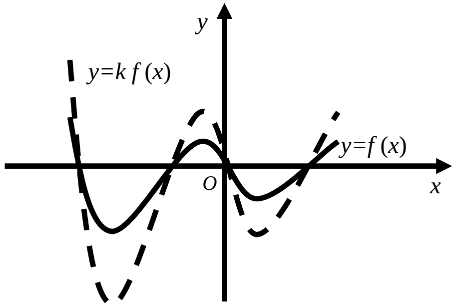
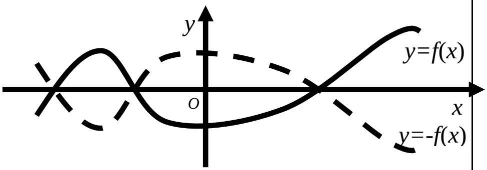
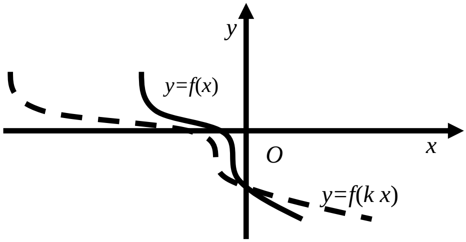
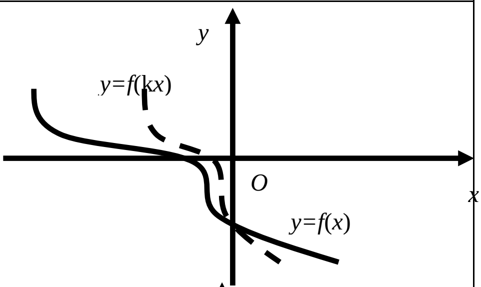
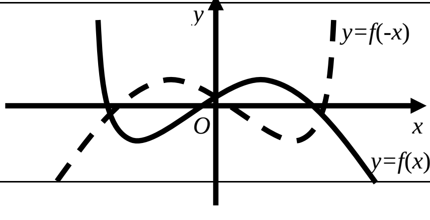
Эти функции периодические, причем $\sin x$ и $\cos x$ имеют период $T = 2\pi$, а tgx и $ctgx$ — период $T = \pi$. Функции $\sin x$ и $\cos x$ ограничены: $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$. Функции $tg\ x$ и $ctg\ x$ имеют вертикальные асимптоты для $tgx\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, и для $ctgx - x = \pi n$.

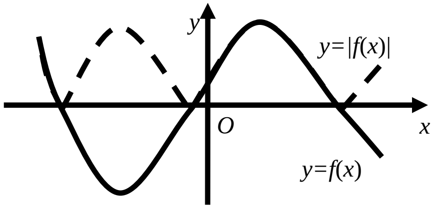
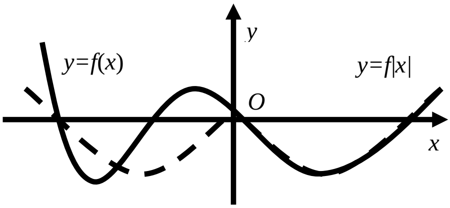
В таблице, представленной далее, приведены способы построения с помощью простых преобразований.

Таблица 1

Построение графиков функций
с помощью простейших преобразований

Задание функции	Способ построения графика	График
1. $y = f(x) + A$	Параллельный перенос (сдвиг) графика функции $y = f(x)$ вдоль оси OY на $\lvert A \rvert$ единиц вверх, если $A > 0$, или вниз, если $A < 0$	
2. $y = f(x + a)$	Параллельный перенос (сдвиг) графика функции $y = f(x)$ вдоль оси OX на $\lvert a \rvert$ единиц влево, если $a > 0$, или вправо, если $a < 0$	
3. $y = k \cdot f(x)$	$k > 1$ Растяжение графика функции $y = f(x)$ вдоль оси OY в k раз	

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$0 < k < 1$
Сжатие графика функции $y = f(x)$ вдоль оси OY в $\frac{1}{k}$ раз</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$k = -1$
Симметричное отображение графика функции $y = f(x)$ относительно оси OX</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4. $y = f(k \cdot x)$</td><td>$k > 1$
Сжатие графика функции $y = f(x)$ вдоль оси OX в k раз</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$0 < k < 1$
Растяжение графика функции $y = f(x)$ вдоль оси OX в $\frac{1}{k}$ раз</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$k = -1$
Симметричное отображение графика функции $y = f(x)$ относительно оси OY</td><td>
</td></tr>
</table>

5. $y=\lvert f(x)\rvert$	Часть графика $y=f(x)$, лежащую выше оси OX, оставить без изменений. Часть графика $y=f(x)$, лежащую ниже оси OX, отобразить относительно оси OX	
6. $y=f(\lvert x\rvert)$	Часть графика $y=f(x)$, лежащую в левой полуплоскости отбросить. Часть графика $y=f(x)$, лежащую в правой полуплоскости, отобразить относительно оси OY	

12. Структура текстовой задачи. Методы и способы решения текстовых задач. Основные типы текстовых задач

В математике важную роль играют задачи, которые часто называют текстовыми, или сюжетными. Эти задачи сформулированы на естественном языке (поэтому их называют текстовыми); в них обычно описывается количественная сторона каких-то явлений, событий (поэтому их и называют сюжетными), они представляют собой задачи на отыскание искомого и сводятся к вычислению значения некоторой величины (поэтому их иногда называют вычислительными).

Как было сказано выше, любая текстовая задача представляет собой описание какого-либо явления (ситуации, процесса). С этой точки зрения текстовая задача есть словесная модель явления (ситуации, процесса). И как во всякой модели, в текстовой задаче описывается не все явление в целом, а лишь некоторые его стороны, главным образом, его характеристики. Рассмотрим задачу: «Автомобиль выехал из пункта А со скоростью 60 км/ч. Через 2 ч вслед за ним выехал второй автомобиль со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии от А второй автомобиль догонит первый?»

В задаче описывается движение двух автомобилей. Как известно, любое движение характеризуется тремя величинами: пройденным расстоянием, скоростью и временем движения. В данной задаче известны скорости первого и второго автомобилей (60 км/ч и 90 км/ч), известно, что они прошли одно и то же расстояние от пункта А до места встречи, количественную характеристику которого и надо найти. Кроме того, что первый автомобиль был в пути на 2 ч больше, чем второй.

Обобщая, можно сказать, что текстовая задача есть описание на естественном языке некоторого явления (ситуации, процесса) с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этого явления, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между компонентами или определить вид этого отношения.

В каждой задаче имеются определенные утверждения и требования относительно объектов, о которых идет речь в задаче.

Утверждения задачи называют условиями. В задаче обычно не одно условие, а несколько элементарных условий. Они представляют собой количественные или качественные характеристики объектов задачи и отношений между ними. Требований в задаче может быть несколько. Они могут быть сформулированы как в вопросительной, так и утвердительной форме. Условия и требования взаимосвязаны.

Систему взаимосвязанных условий и требований называют высказывательной моделью задачи.

Таким образом, чтобы понять, какова структура задачи, надо выявить ее условия и требования, отбросив все лишнее, второстепенное, не влияющее на ее структуру. Иными словами, надо построить высказывательную модель задачи.

Чтобы получить эту модель, надо текст задачи развернуть (это можно сделать письменно или устно), так как текст задачи, как правило, дается в сокращенном, свернутом виде. Для этого можно переформулировать задачу, построить ее графическую модель, ввести какие-либо обозначения и т. д.

Рассмотрим задачу. Две девочки одновременно побежали навстречу друг другу по спортивной дорожке, длина которой 420 м. Когда они встретились, первая пробежала на 60 м больше, чем вторая. С какой скоростью бежала каждая девочка, если они встретились через 30 с?

В задаче речь идет о движении двух девочек навстречу друг другу. Как известно, движение характеризуется тремя величинами: расстоянием, скоростью и временем. Сформулируем условия и требования задачи.

Условия задачи:

1. Две девочки бегут навстречу друг другу.
2. Движение они начали одновременно.
3. Расстояние, которое они пробежали, — 420 м.
4. Одна девочка пробежала на 60 м больше, чем другая.
5. Девочки встретились через 30 с.
6. Скорость движения одной девочки больше скорости движения другой.

Требования задачи:

1. С какой скоростью бежала первая девочка?
2. С какой скоростью бежала вторая девочка?

По отношению между условиями и требованиями различают:

— определенные задачи — в них заданных условий столько, сколько необходимо и достаточно для выполнения требований;

— недоопределенные задачи — в них условий недостаточно для получения ответа;

— переопределенные задачи — в них имеются лишние условия.

Недоопределенные задачи считают задачами с недостающими данными, а переопределенные — задачами с избыточными данными.

Уточним смысл термина «решение задачи». Так сложилось, что этим термином обозначают разные понятия:

1) решением задачи называют результат, т. е. ответ на требование задачи;

2) решением задачи называют процесс нахождения этого результата, причем этот процесс рассматривают двояко: и как метод нахождения результата (например, говорят о решении задачи арифметическим способом) и как последовательность тех действий, которые выполняет решающий, применяя тот или иной метод.

Основными методами решения текстовых задач являются арифметические и алгебраические.

Решить задачу арифметическим способом — значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения арифметических действий над числами.

Рассмотрим решение следующей задачи арифметическим способом.

Задача 1. Автомобиль должен проехать за 3 дня 1 430 км. В первый день он ехал 6 ч со скоростью 82 км/ч, во второй день он увеличил скорость на 4 км/ч и ехал с этой скоростью 7 ч. С какой скоростью должен ехать автомобиль в третий день, чтобы проехать оставшееся расстояние за 4 ч?

Решение.

1) $82+4=86$ (км/ч) — скорость во второй день;
2) $82\cdot 6=492$ (км) — проехал в первый день;
3) $86\cdot 7=602$ (км) — проехал во второй день;
4) $492+602=1094$ (км) — проехал за два дня;
5) $1430-1094=336$ (км) — осталось проехать в третий день;
6) $336:4=84$ (км/ч) — такой должна быть скорость в третий день.

Решить задачу ***алгебраическим методом*** — значит найти ответ на требование задачи, составив и решив уравнение (неравенство) или систему уравнений (неравенств).

Например, предыдущую задачу можно решить с помощью составления уравнения, если обозначить через x (км/ч) скорость автомобиля в третий день. Получим следующее уравнение:

$$4x+82\cdot 6+(82+4)\cdot 7=1430.$$

Выполняя преобразования, получим, что $x = 84$.

Заметим, что, если для одной и той же задачи можно составить различные уравнения, то это означает, что данную задачу можно решить различными *алгебраическими способами*.

Как правило, в учебно-методической литературе выделяют следующие основные *этапы решения* текстовой задачи:

1. Анализ задачи.
2. Поиск плана решения.
3. Осуществление плана решения задачи.
4. Проверка решения задачи.

Основное назначение *анализа* — понять в целом ситуацию, описанную в задаче; выделить условия и требования; назвать известные и искомые объекты, выделить все отношения (зависимости) между ними.

Для того чтобы разобраться в содержании задачи, вычленить условия и требования, целесообразно задать специальные вопросы и ответить на них:

О чем задача, т. е. о каком процессе (явлении, ситуации) идет речь в задаче, какими величинами характеризуется этот процесс? Что требуется найти в задаче? Что обозначают те или иные слова в тексте задачи? Что в задаче известно о названных величинах? Что неизвестно? Что является искомым?

Рассмотрим *задачу 4*. Из пункта А в пункт В вышел поезд со скоростью 40 км/ч. Через 5 ч выходит поезд из пункта В в пункт А со скорость 60 км/ч. Расстояние между А и В 700 км. На каком расстоянии от А поезда встретятся?

Проведем анализ задачи.

1) *О чем эта задача?* В задаче речь идет о движении поездов, причем о движении навстречу. Оно характеризуется для каждого из участников движения скоростью, временем и пройденным расстоянием.

2) *Что требуется найти в задаче?* Требуется найти на каком расстоянии от пункта А встретятся поезда.

3) *Что в задаче известно о движении каждого из участников?* В задаче известно, что: а) поезда идут во встречных направлениях из пунктов А и В соответственно; б) расстояние между пунктами 700 км; в) скорость поезда. Движущегося из пункта А в пункт В — 40 км/ч, скорость поезда, движущегося ему навстречу — 60 км/ч; г) первый поезд находился в пути 5 ч до начала движения второго.

4) *Что в задаче неизвестно?* В задаче неизвестно на каком расстоянии от пункта А встретятся поезда; неизвестно сколько часов в пути до встречи находился каждый поезд.

Результат анализа можно изобразить в виде схематического чертежа, который можно рассматривать как вспомогательную модель условия задачи, которая является средством поиска плана ее решения.

Перейдем ко второму этапу решения текстовой задачи — *поиску и составление плана решения задачи.*

Назначение этого этапа установить связь между данными и искомыми, наметить последовательность действий. План решения задачи — это лишь идея решения, его замысел, может случиться, что идея неверна. Тогда надо вновь возвращаться к анализу задачи и начинать все сначала.

Поиск плана решения заключается в том, чтобы определить какое неизвестное может быть найдено по данным задачи, и с помощью какого действия. При решении текстовых задач алгебраическим методом важную роль играет этап выбора неизвестного. Часто в качестве неизвестного выбирают искомую величину, однако, если неизвестных величин несколько, то можно за основную принять любую из них и выразить через нее другие величины. При этом будут получаться различные уравнения, более простые или более сложные, поэтому целесообразность выбора неизвестного определяется получаемым уравнением.

Для данной задачи рассмотрим два способа решения:

1) в качестве неизвестного выберем искомую величину; 2) в качестве неизвестного выберем время, которое находился в пути до встречи, второй поезд.

<u>1 способ</u>. Пусть расстояние от пункта А до места встречи поездов равно *x км.* Выразим через эту величину и время движения поездов до встречи, зная скорости движения поездов, учитывая, что первый поезд находился в пути до встречи на 5 ч дольше.

Пусть расстояние от пункта А до места встречи поездов равно х км. Тогда время в пути первого поезда до встречи равно $(x : 40)$ *ч. Путь, пройденный вторым поездом* $(700 - x)$ *км, а время движения второго поезда до встречи* $(700 - x): 60$ *ч. По условию* $(x : 40)$ *больше* $(700 - x) : 60$ *на* 5 *ч. Составим уравнение:* $x : 40 - \big(700 - x\big): 60 = 5.$

Как можно заметить, для решения полученного уравнения требуется проводить вычитание дробей с разными знаменателями. В связи с этим, данный способ выбора неизвестного, обеспечивая путем решения уравнения и получение ответа на вопрос задачи, все-таки дает не самое «простое» уравнение, к тому же не решаемое в начальной школе.

2 способ. *Пусть второй поезд, вышедший из пункта В, находился в пути до встречи поездов — х ч. Тогда расстояние, которое проехали до встречи оба поезда за х ч равно* $(40 + 60)x$ *км. Первый поезд находился в пути до встречи поездов на 5 ч больше, чем второй, значит, он еще прошел расстояние, которое равно: 40·5 км. По условию расстояние между пунктами равно 700 км. Составим уравнение:*

$$(60 + 40)\,x + 40 \cdot 5 = 700.$$

Это уравнение и по виду, и по способу решения проще. Но, необходимо отметить, что ответ на вопрос задачи, не совпадает со значением корня уравнения. Если в качестве неизвестного были выбраны не искомые величины, то их нужно найти после решения уравнения, чтобы ответить на вопрос задачи.

Третий этап — *осуществление плана решения задачи.* Назначение данного этапа — найти ответ на требование задачи, выполнив все действия в соответствии с планом.

Для текстовых задач, решаемых арифметическим способом, используются следующие приемы: запись по действиям (с пояснением, без пояснения, с вопросами); запись в виде выражения.

Пример записи решения по действиям с пояснением, указан к задаче 3. Запись решения этой задачи в виде выражения, может быть следующей:

$$(1430 - (82 \cdot 6 + 86 \cdot 7)): 4 = 84 \text{ (км/ч)}.$$

При решении текстовой задачи алгебраическим методом, осуществление плана заключается в решении составленного уравнения. Например, решение задачи 4 (вторым способом) может быть записано так:

$$(60 + 40) \cdot x + 40 \cdot 5 = 700$$
$$100x + 200 = 700;$$
$$100x = 700 - 200;$$
$$100x = 500;$$
$$x = 500 : 100;$$
$$x = 5.$$

Для ответа на вопрос задачи необходимо вычислить значение выражения: $40 \cdot 5 + 200 = 400$ (км).

Проверка решения задачи

Назначение данного этапа — установить правильность или ошибочность выполненного решения.

Обычно проверку проводят в соответствии со смыслом условия задачи. Для этого найденный результат вводится в текст задачи и на основе рассуждений устанавливается, не возникает ли при этом противоречий.

Проведем проверку решения рассматриваемой задачи 4 именно таким способом.

Расстояние 400 км пройдено первым поездом за: 400 : 40 = 10 ч. Второй поезд шел до встречи на 5 часов меньше, т. е. 10 – 5 = 5 ч и прошел путь 5 · 60 = 300 км, что в сумме с 400 должно составить 700 км. Это действительно так. Значит, задача решена верно.

Ответ: на расстоянии 400 км от пункта А поезда встретятся.

Проверка именно по условию должна дать ответ на вопрос о том, верно или нет решена задача. Так как если проверять решение уравнения, то может быть ситуация, что уравнение составлено неверно, но решено правильно, поэтому, проверив только решение уравнения, нельзя утверждать, что задача решена правильно.

Могут быть и такие случаи, когда уравнение составлено верно и решено правильно, но корни уравнения не имеют смысла для данной задачи.

Приведем пример такой ситуации.

Задача 5. В трех баках было вместе 50 л бензина, причем в первом было на 10 л больше, чем во втором. Когда из первого бака вылили в третий 26 л, во втором и третьем стало бензина поровну. Сколько было литров бензина первоначально в первом баке?

Решение.

Пусть x л было в первом баке первоначально, тогда $(x - 10)$ *л во втором баке первоначально, следовательно, в третьем первоначально было* $50 - x - (x - 10) = 60 - 2x$ *(л).*

После переливания в третьем баке стало $60 - 2x + 26 = 86 - 2x$ *(л).*

По условию после переливания во втором и третьем баках стало поровну. Составим уравнение: $86 - 2x = x - 10,\ x = 32$ *(л).*

Ответ задачи совпадает с корнем уравнения.

Сделаем проверку: 32 *л было в первом баке первоначально,* 32 –10 = = 22 *(л) — было во втором баке первоначально,* 50 – 32 – 22 = –4 *(л) — было в третьем баке, чего быть не может, так как количество бен-*

зина есть величина положительная. Следовательно, задача не имеет решения.

Проверку можно также проводить, решая задачу другим способом, или решая обратную задачу к данной, то есть когда искомая величина становится известной, а находят одну из ранее данных величин. Но на практике предпочтение отдают проверке по смыслу данной задачи.

Текстовые задачи можно классифицировать по фабуле задачи — это деление на задачи на движение, на работу, на смеси и сплавы, на проценты и т. д. Остановимся на одном классе текстовых задач, наиболее часто встречающихся в школьных учебниках по математике для начальной школы — задачах на движение.

В задачах на движение основным отношением является зависимость между тремя величинами: скоростью, расстоянием и временем. Во многих случаях речь идет о равномерном прямолинейном движении.

Указанное основное отношение имеет вид: $s = v \cdot t$.

Среди задач на движение выделяют задачи на встречное движение, на движение в противоположных направлениях, на движение в одном направлении. Рассмотрим особенности решения основных типов задач на движение. Предварительно введем ряд понятий, используемых при решении указанных выше задач.

Если два объекта движутся равномерно с разными скоростями, то расстояние между ними за каждую единицу времени или уменьшается, или увеличивается на одно и то же число единиц.

Расстояние, на которое сближаются объекты за единицу времени, называется скоростью сближения. Расстояние, на которое удаляются объекты за единицу времени, называется скоростью удаления.

Задачи на встречное движение двух тел

Пусть движение первого тела характеризуется величинами s_1, v_1, t_1, а движение второго тела — s_2, v_2, t_2. Такое движение можно представить на схематическом чертеже (рис. 25):

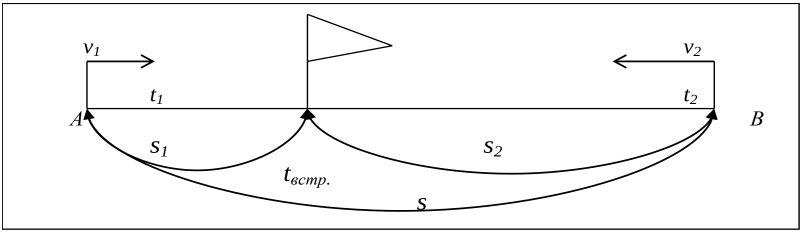


Рис. 25

Если два объекта начинают движение одновременно навстречу друг другу, то каждое из них с момента выхода и до встречи затрачивает одинаковое время, то есть $t_1 = t_2 = t_{встр.}$.

Скорость сближения равна сумме скоростей движущихся тел, т. е. $v_{сбл.} = v_1 + v_2$.

Все расстояние, пройденное движущимися телами при встречном движении, может быть подсчитано по формуле: $s = v_{сбл.} \cdot t_{встр.}$

Задача 6. Два пешехода одновременно вышли навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 24 км. Скорость одного из них 5 км/ч, а другого — 3 км/ч. Через сколько часов они встретились?

Можно составить краткую запись условия задачи в форме схематического чертежа (рис. 26):

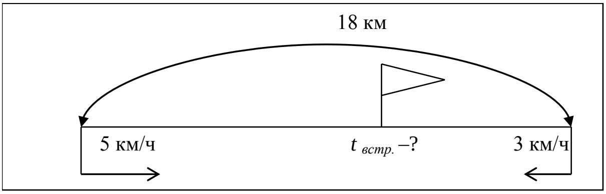


Рис. 26

Решение. В задаче рассматривается движение навстречу. Поэтому для решения задачи сначала найдем скорость сближения, а затем можно найти время, через которое пешеходы встретятся.

1) 5 + 3 = 8 (км/ч) — скорость сближения

2) 24 : 8 = 3 (ч) — время в пути до встречи

Ответ: через 3 ч пешеходы встретятся.

Задачи на движение двух тел в одном направлении

Среди этих задач различают:

1) задачи, в которых движение начинается одновременно из разных пунктов;

2) задачи, в которых движение начинается в разное время из одного пункта.

Рассмотрим случай, когда движение двух тел начинается одновременно в одном направлении из разных пунктов, лежащих на одной прямой.

Пусть движение первого тела характеризуется величинами s_1, v_1, t_1, а движение второго тела — s_2, v_2, t_2. Такое движение можно представить на схематическом чертеже (рис. 27):

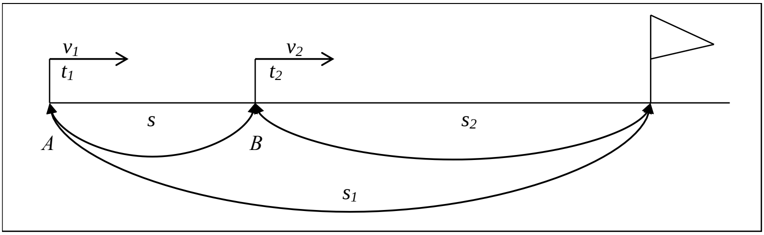


Рис. 27

Если при движении в одном направлении первое тело догоняет второе, то $v_1 > v_2$. Кроме того, за единицу времени первый объект приближается к другому на расстояние $v_1 - v_2$. Это расстояние является скоростью сближения

$$v_{сбл.} = v_1 - v_2.$$

Расстояние s, представляющее длину отрезка АВ, находят по формулам: $s = s_1 - s_2$ и $s = v_{сбл.} \cdot t_{встр}$.

Задача 7. Из двух пунктов, удаленных друг от друга на 60 км, выехали одновременно в одном направлении два автомобиля. Скорость одного — 70 км/ч, другого — 80 км/ч. Через сколько часов второй автомобиль догонит первого?

Решение. В задаче рассматривается движение двух автомобилей одновременно из разных пунктов, находящихся на расстоянии 60 км. Можно составить краткую запись условия задачи в форме схематического чертежа (рис. 28):

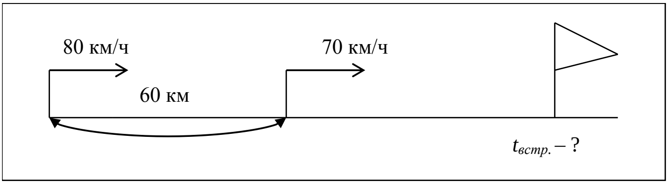


Рис. 28

Решение задачи по действиям имеет следующий вид:

1) 80 – 70 = 10 (км/ч) — скорость сближения автомобилей;

2) 60 : 10 = 6 (ч) — за это время второй автомобиль догонит первого.

Задачи на движение двух тел в противоположных направлениях

В таких задачах два тела могут начинать движение в противоположных направлениях из одной точки: а) одновременно; б) в разное время. А могут начинать свое движение из двух разных точек, находящихся на заданном расстоянии, и в разное время.

В этих задачах основным положением будет являться то, что объекты удаляются друг от друга. Расстояние, на которое удаляются объекты за единицу времени, называется ***скоростью удаления***:

$v_{удал.} = v_1 + v_2$, где v_1 и v_2 соответственно скорости первого и второго тел.

Задача 8. Два поезда отошли одновременно от одной станции в противоположных направлениях. Их скорости 60 км/ч и 70 км/ч. На каком расстоянии друг от друга будут эти поезда через 3 ч после выхода.

Решение. Краткую запись в виде схематического чертежа можно представить следующим образом (рис. 29):

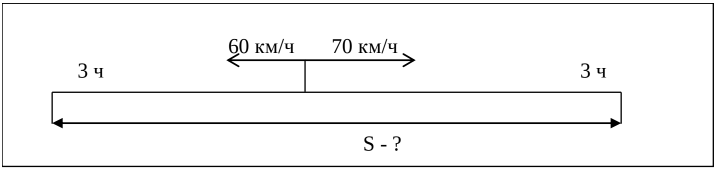


Рис. 29

60 + 70 = 130 (км/ч) — скорость удаления поездов

1) 130 · 3 = 390 (км) — расстояние между поездами через 3 ч.

Решение текстовых задач занимает одно из ведущих мест в содержании курса математики начальных классов. Большое внимание уделяется формированию у школьников умений решать различные задачи на движение. Так как эти умения востребованы не только в начальной школе, но и в дальнейшем при изучении курса математики в 5—11 классах, то необходимо осуществлять контроль за уровнем их сформированности, своевременно проводить работу по диагностике и коррекции знаний и умений учащихся по данной теме.

13. Геометрическая фигура как множество точек. Свойства геометрических фигур на плоскости

Геометрическую фигуру определяют как любое множество точек.

Отрезок, прямая, круг, шар — геометрические фигуры.

Если все точки геометрической фигуры принадлежат одной плоскости, она называется плоской. Например, отрезок, прямоугольник — это плоские фигуры. Существуют фигуры, не являющиеся плоскими. Это, например, куб, шар, пирамида.

Так как понятие геометрической фигуры определено через понятие множества, то можно говорить о том, что одна фигура включена в другую, можно рассматривать объединение, пересечение и разность фигур.

Например, объединением двух лучей AB и MK (рис. 30) является прямая KB, а их пересечение есть отрезок AM.

Рис. 30

Различают выпуклые и невыпуклые фигуры. Фигура называется выпуклой, если она вместе с любыми двумя своими точками содержит также соединяющий их отрезок.

Фигура F_1, изображенная на рис. 31, выпуклая, а фигура F_2 — невыпуклая.

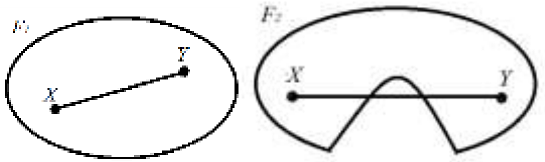


Рис. 31

Выпуклыми фигурами являются плоскость, прямая, луч, отрезок, точка. Круг также является выпуклой фигурой (рис. 32). Если продолжить отрезок XY до пересечения с окружностью, то получим хорду AB. Хорда содержится в круге, следовательно, отрезок XY тоже содержится в круге и, значит, круг −выпуклая фигура.

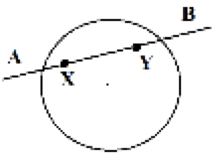


Рис. 32

Для многоугольников известно другое *определение*: многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.

Основываясь на изложенных понятиях, рассмотрим другие геометрические фигуры, изучаемые в школьном курсе планиметрии. Их определения и основные свойства, принимая их без доказательства.

Определение. Угол — это геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Лучи называются сторонами угла, а их общее начало — его вершиной.

Угол обозначают: либо указывая его вершину, либо его стороны, либо три точки: вершину и две точки на сторонах угла: $\angle A, \angle(k, l), \angle ABC$.

Определение. Угол называется развернутым, если его стороны лежат на одной прямой.

Определение. Угол, составляющий половину развернутого угла, называется прямым.

Определение. Угол, меньший прямого, называется острым.

Определение. Угол, больший прямого, но меньший развернутого, называется тупым.

В геометрии рассматривают понятие плоского угла.

Определение. Плоский угол — это часть плоскости, ограниченная двумя различными лучами, исходящими из одной точки.

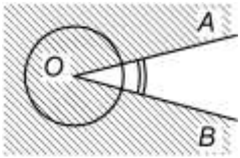


Рис. 33

Существуют два плоских угла, образованных двумя лучами с общим началом. Они называются дополнительными. На рис. 33 изображено два плоских угла со сторонами *OA* и *OB,* один из них заштрихован. Углы, которые рассматривают в планиметрии, не превосходят развернутого.

Определение. Два угла называются смежными, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми.

Теорема. Сумма смежных углов равна 180°.

Определение. Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого. Углы *AOD* и *COB,* а также углы *AOC* и *DOB* — вертикальные (рис. 34).

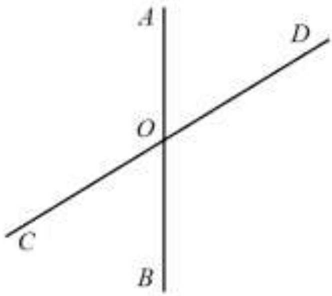


Рис. 34

Теорема. Вертикальные углы равны.

Определение. Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Если прямая a параллельная прямой b, то пишут $a \| b$.

Рассмотрим некоторые свойства параллельных прямых, и признаки параллельности. Признаками называют теоремы, в которых устанавливается наличие какого-либо свойства объекта, находящегося в определенной ситуации.

Признаки параллельности прямых:

1. Две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу.

2. Если внутренние накрест лежащие углы равны или сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Справедливо утверждение, обратное второму признаку параллельности прямых: если две параллельные прямые пересечены третьей, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма односторонних углов равна 180°.

Свойство параллельных прямых раскрывается в теореме, носящей имя древнегреческого математика Фалеса: если параллельные прямые, пересекающие стороны угла отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Определение. Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.

Если прямая a перпендикулярна прямой b,то пишут $a \perp b$.

Основные свойства перпендикулярных прямых:

1. Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную к ней прямую, и только одну.

2. Из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и только один.

Определение. Перпендикуляром к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной данной, имеющий концом их точку пересечения. Конец этого отрезка называется основанием перпендикуляра.

Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую, называется расстоянием от точки до прямой.

Расстоянием между параллельными прямыми называется расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой.

Треугольник — одна из простейших геометрических фигур. Однако его изучение породило целую науку — тригонометрию, которая возникла из практических потребностей при измерении земельных участков, составлении карт местности, конструировании различных механизмов.

Первые упоминания о треугольнике и его свойствах содержатся в египетских папирусах. Например, в них предлагается находить площадь равнобедренного треугольника как произведение половины основания на боковую сторону, хотя для любого равнобедренного треугольника с малым углом при вершине, противоположной основанию, такой способ дает приближенное значение площади.

Многие свойства треугольников были открыты и доказаны математиками Древней Греции. Среди них — знаменитая теорема Пифагора.

Определение. Треугольником называется геометрическая фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков.

Любой треугольник разделяет плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю. Фигуру, состоящую из треугольника и его внутренней области, также называют треугольником (или плоским треугольником).

В любом треугольнике есть стороны, углы, высоты, биссектрисы, медианы, средние линии.

Углом треугольника ABC при вершине A называется угол, образованный полупрямыми AB и AC.

Определение. Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, содержащей противолежащую сторону.

Определение. Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противоположной стороне.

Определение. Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны.

Определение. Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Определение. Треугольники называются равными, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны. При этом соответствующие углы должны лежать против соответствующих сторон.

Признаки равенства треугольников:

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

2. Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

3. Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Определение. Треугольник называется равнобедренным, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются боковыми, а третья сторона называется основанием треугольника.

Теорема. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

Свойства треугольников

1. Сумма углов треугольника равна 180°.

2. Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.

3. В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.

Определение. Треугольник называется прямоугольным, если у него есть прямой угол.

Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу называется гипотенузой, две другие стороны называются катетами.

Для прямоугольного треугольника с углом $30°$ справедливо следующее свойство: катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы.

Для прямоугольного треугольника верна ***теорема Пифагора***: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Определение. Четырехугольником называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков, причем никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться. Данные точки называются вершинами четырехугольника, а соединяющие их отрезки — его сторонами.

Любой четырехугольник разделяет плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю. Фигуру, состоящую из четырехугольника и его внутренней области, также называют четырехугольником (или плоским четырехугольником).

Вершины четырехугольника называют соседними, если они являются концами одной из его сторон. Вершины, не являющиеся соседними, называются противолежащими. Отрезки, соединяющие противолежащие вершины четырехугольника, называются диагоналями.

Стороны четырехугольника, исходящие из одной вершины, называются соседними. Стороны, не имеющие общего конца, называются противолежащими. У четырехугольники $ABCD$ (рис. 35) вершины A и B — соседние, а вершины A и С — противолежащие, стороны AB и BC — соседние, BC и BD — противолежащие; отрезки AC и BD — диагонали данного четырехугольника.

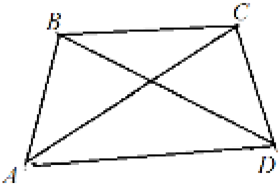


Рис. 35

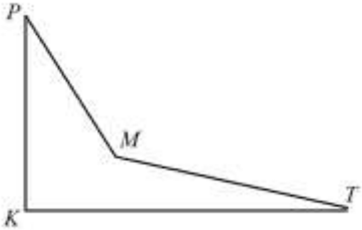


Рис. 36

Четырехугольники бывают выпуклые и невыпуклые. Так, четырехугольник *ABCD* выпуклый, а четырехугольник *KPMT* (рис. 35) невыпуклый. Среди выпуклых четырехугольников выделяют параллелограммы и трапеции.

Определение. Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны.

Пусть *ABCD* — параллелограмм. Из вершины *B* на прямую *AD* опустим перпендикуляр *BE*. Тогда отрезок *BE* называется высотой параллелограмма, соответствующей сторонам *BC* и *AD* (рис. 37). Отрезок *CM* — высота параллелограмма *ABCD*, соответствующая сторонам *CD* и *AB*.

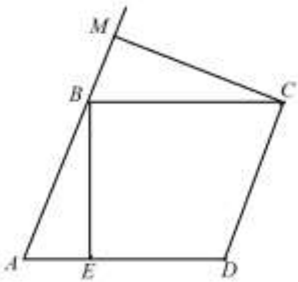


Рис. 37

Определение. Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то данный четырехугольник — параллелограмм.

Свойства параллелограмма:

1. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

2. У параллелограмма противолежащие стороны и противолежащие углы раны.

Определение. Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны.

Эти параллельные стороны называются основаниями трапеции. Две другие стороны называются боковыми.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется средней линией трапеции.

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Из множества параллелограммов выделяют прямоугольники и ромбы.

Определение. Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Теорема. Диагонали прямоугольника равны.

Определение. Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Теорема. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами его углов.

Из множества прямоугольников выделяют квадраты.

Определение. Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Квадрат является также ромбом, поэтому обладает свойствами прямоугольника и ромба.

Обобщением понятия треугольника и четырехугольника является понятие многоугольника. Прежде чем ввести определение многоугольника, введем понятие ломаной.

Определение. Ломаной $A_1A_2A_3 \dots A_n$ называется фигура, которая состоит из точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ и соединяющих их отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ Точки $A_1A_2A_3 \dots A_n$ называются вершинами ломаной, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ — ее звеньями. Ломаная называется простой, если она не имеет самопересечений. Ломаная называется замкнутой, если у нее концы совпадают. О ломаных, изображенных на рисунке 38, можно сказать, что: $A_1A_2A_3,A_4A_5A_6$ — простая; $A_1A_2A_3$ — простая замкнутая; $A_1A_2A_3,A_4$ — замкнутая ломаная, но она не является простой, так как имеет самопересечение.

Длиной ломаной называется сумма длин ее звеньев.

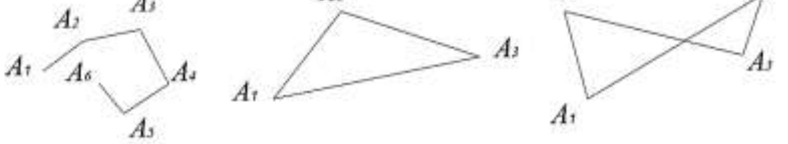


Рис. 38

Теорема. Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы.

Определение. Многоугольником называется простая замкнутая ломаная, если ее соседние звенья не лежат на одной прямой.

Вершины ломаной называются вершинами многоугольника, а ее звенья — его сторонами. Отрезки, соединяющие не соседние вершины, называются диагоналями.

Любой многоугольник разделяет плоскость на две части, одна из которых называется внутренней, а другая — внешней областью многоугольника (или плоским многоугольником).

Различают выпуклые и невыпуклые многоугольники.

Выпуклый многоугольник называется правильным, если у него все стороны и все углы равны.

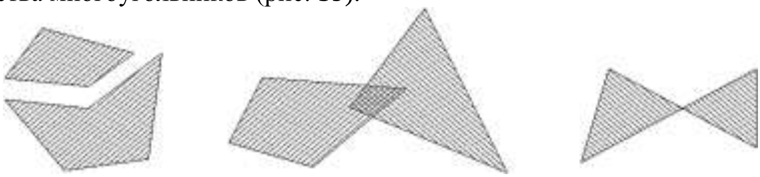
Правильным треугольником является равносторонний треугольник, правильным четырехугольником — квадрат.

Углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, образуемый его сторонами, сходящимися в этой вершине.

Теорема. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

В геометрии рассматривают также многоугольные фигуры.

Многоугольной фигурой называется объединение конечного множества многоугольников (рис. 39).



а *б* *в*

Рис. 39

Многоугольники, из которых состоит многоугольная фигура, могут не иметь общих внутренних точек (рис. 39*а, в*); могут иметь общие внутренние точки (рис. 39*б*).

Многоугольная фигура F состоит из многоугольных фигур, если она является их объединением, а сами фигуры не имеют общих внутренних точек. Например, о многоугольных фигурах, изображенных на рис. 39*а, в*, можно сказать, что они состоят из двух многоугольных фигур или что они разбиты (каждая) на две многоугольные фигуры.

Определение. Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром.

Определение. Расстояние от любой точки окружности до ее центра называется радиусом окружности.

Радиусом называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром.

Определение. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой. Хорда, проходящая через центр, называется диаметром.

Определение. Кругом называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, находящихся на расстоянии, не больше данного, от данной точки. Эта точка называется центром круга, а данное расстояние — радиусом круга.

Границей круга является окружность с теми же центром и радиусом.

Свойства окружности и круга:

Определение. Прямая и окружность касаются, сети они имеют единственную общую точку. Такую прямую называют касательной, а общую точку прямой и окружности — точкой касания.

Если прямая касается окружности, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания (рис. 40). Справедливо и обратное утверждение.

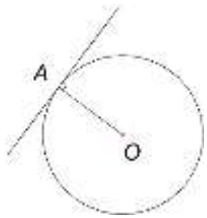


Рис. 40

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре. Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется дугой окружности, соответствующей этому центральному углу. На рис. 41*а* штриховкой отмечен центральный угол, которому соответствует дуга *AB*.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают ее, называется вписанным в эту окружность. Угол *BAC* на рис. 41*б* вписан в окружность.

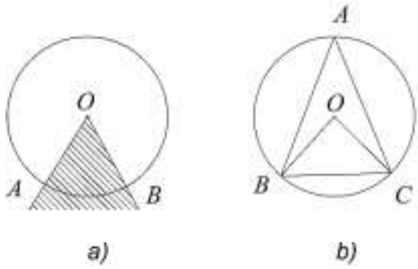


Рис. 41

Можно сказать, что угол *A* опирается на хорду *BC.* Прямая *BC* разбивает окружность на две дуги. Центральный угол, соответствующий той дуге, которая не содержит точку *A*, называется центральным, соответствующим данному вписанному углу.

Теорема. Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла.

Теорема. Вписанные углы, стороны которых проходят через точки *A* и *B*, принадлежащие окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой *AB*, равны (рис. 42).

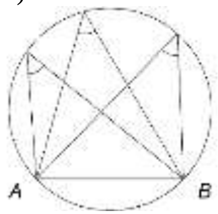


Рис. 42

Теорема. Углы, опирающиеся на диаметр окружности, — прямые.

Определение. Окружность называется описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины.

Теорема. Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к его сторонам, проведенных через середины этих сторон (рис. 43).

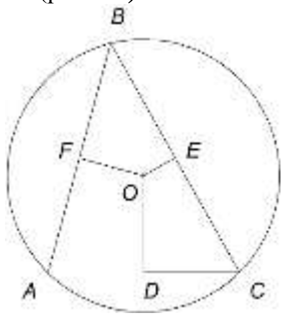


Рис. 43

Определение. Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.

Теорема. Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис (рис. 44).

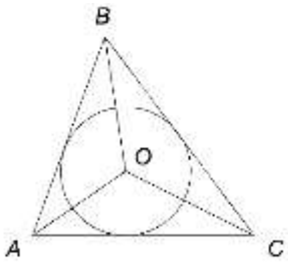


Рис. 44

Из последних двух теорем следует, что биссектрисы треугольника пересекаются в центре вписанной окружности, а серединные перпендикуляры — в центре описанной.

Медианы треугольника, так же как и его высоты, пересекаются в одной точке. Точку пересечения медиан называют центром тяжести треугольника, а точку пересечения высот — ортоцентром.

Во всякий треугольник можно вписать окружность и около всякого треугольника можно описать окружность. Возникает вопрос: обладают ли аналогичным свойством четырехугольники? Нет, для того чтобы в четырехугольник можно было вписать или около него описать окружность, необходимо, чтобы он был правильным.

Около всякого правильного многоугольника можно описать окружность и во всякий правильный многоугольник можно вписать окружность, причем центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

14. Геометрические построения на плоскости

В задачах на построение идет речь о построении геометрической фигуры с помощью данных чертежных инструментов. Такими инструментами чаще всего являются линейка и циркуль. Задачи на построение помогают лучше понять свойства геометрических фигур, способствуют развитию графических умений, однако, решение задачи состоит не только в построении фигуры, сколько в решении вопроса о том, как это сделать, и соответствующем доказательстве. Задача считается решенной, если указан способ построения фигуры и доказано, что в результате выполнения указанных построений действительно получается фигура с требуемыми свойствами.

Существуют условия, которые надо соблюдать при построении фигур с помощью циркуля и линейки.

Циркуль — это инструмент, позволяющий построить:

а) окружность, если построены ее центр и отрезок, равный радиусу (или его концы);

б) любую из двух дополнительных дуг окружности, если построены ее центр и концы этих дуг.

Линейка — это инструмент, позволяющий построить:

а) отрезок, соединяющий две построенные точки;

б) прямую, проходящую через две построенные точки;

в) луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую построенную точку.

С помощью циркуля и линейки можно изобразить:

а) любое конечное число общих точек двух построенных фигур, если такие точки существуют;

б) точку, заведомо не принадлежащую какой-либо построенной фигуре;

в) точку, принадлежащую какой-либо построенной фигуре.

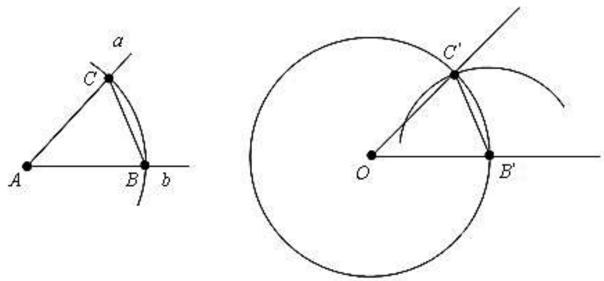
Рассмотрим простейшие задачи на построение.

1. Построить на данной прямой отрезок *CD*, равный данному отрезку *AB*.

Возможность такого построения вытекает из аксиомы откладывания отрезка. С помощью циркуля и линейки оно осуществляется следующим образом. Пусть даны прямая *a* и отрезок *AB*. Отмечаем на прямой точку *C* и строим с центром в точке С окружность радиусом, равным отрезку *AB*. Точку пересечения окружности с прямой *a* обозначаем *D*. Получаем отрезок *CD*, равный *AB*.

2. Отложить от данной полупрямой в данную полуплоскость угол, равный данному углу.

Пусть даны угол *A* и полупрямая с начальной точкой *O*. Проведем окружность произвольного радиуса с центром в вершине *A* данного угла (рис.45*а*). Точки пересечения окружности со сторонами угла обозначим В и С. Радиусом *AB* проведем окружность с центром в точке *O* (рис. 45*б)*. Точку пересечения этой окружности с данной полупрямой обозначим *B'*. Опишем окружность с центром *B'* и радиусом *BC*. Точка *C'* пересечения построенных окружностей в указанной полуплоскости лежит на стороне искомого угла.



а *б*

Рис. 45

Построенный угол $B'OC'$ равен углу BAC, так как это соответствующие углы равных треугольников ABC и $B'OC'$.

3. Найти середину отрезка.

Пусть AB — данный отрезок. Построим две окружности одного радиуса с центрами A и B (рис. 46).

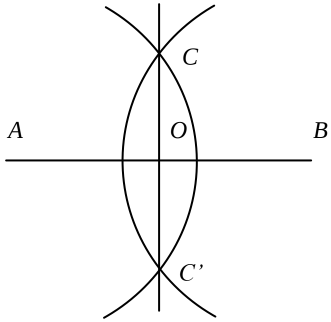


Рис. 46

Они пересекаются в точках C и C', лежащих в разных полуплоскостях относительно пряной AB. Проведем прямую CC'. Она пересечет прямую AB в точке O. Эта точка и есть середина отрезка AB.

Действительно, треугольники CAC' и CBC' равны по трем сторонам. Отсюда следует равенство углов ACO и OCB. Значит, отрезок CO — биссектриса равнобедренного треугольника ACB и, следовательно, его медиана, т. е. точка O — середина отрезка AB.

4. Построить биссектрису данного угла.

Из вершины A данного угла как из центра описываем окружность произвольного радиуса (рис. 47).

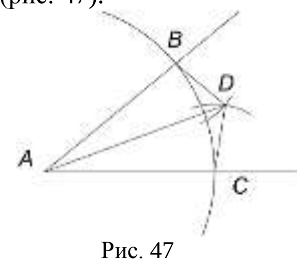


Рис. 47

Пусть B и C — точки ее пересечения со сторонами угла. Из точек B и C описываем окружности одного радиуса. Пусть D — точка их пересечения, отличная от A. Тогда полупрямая AD и есть биссектриса угла A. Докажем это. Рассмотрим треугольники ABD и ACD. Они равны по трем сторонам. Отсюда следует равенство соответствующих углов *DAB* и *DAC*, т. е. луч *AD* делит угол *BAC* пополам и, следовательно, является бисектрисой.

5. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной прямой.

Пусть даны точка O и прямая a. Возможны два случая:

1) точка O лежит на прямой a;

2) точка O не лежит на прямой a.

В первом случае построение выполняется так же, как и в задаче 4, потому что перпендикуляр из точки O, лежащей на прямой, — биссектриса развернутого угла (рис. 48).

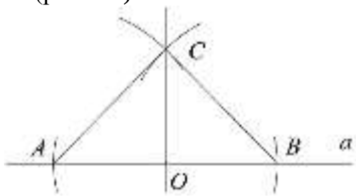


Рис. 48

Во втором случае из точки O как из центра проводим окружность, пересекающую прямую a (рис. 49), а затем из точек A и B тем же радиусом проводим еще две окружности. Пусть O' — точка их пересечения, лежащая в полуплоскости, отличной от той, в которой лежит точка O. Прямая OO' и есть перпендикуляр к данной прямой a.

Рис. 49

Докажем это. Обозначим через C точку пересечения прямых AB и OO'. Треугольники AOB и $AO'B$ равны по трем сторонам. Поэтому угол OAC равен углу $O'AC$ и, значит, треугольники OAC и $O'AC$ равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда их углы ACO и ACO'

равны. А так как углы смежные, то они прямые. Таким образом, *OC* есть перпендикуляр к прямой *a*.

6. Через данную точку провести прямую, параллельную данной.

Пусть даны прямая *a* и точка *A* вне этой прямой (рис. 50). Возьмем на прямой *a* какую-нибудь точку *B* и соединим ее с точкой *A*.

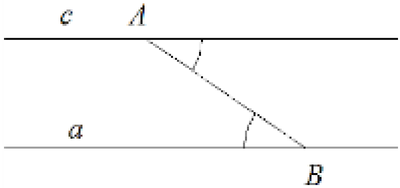


Рис. 50

Через точку *A* проведем прямую *c,* образующую с *AB* такой же угол, какой *AB* образует с данной прямой *a*, но на противоположной стороне от *AB*. Построенная прямая будет параллельна прямой *a,* что следует из равенства накрест лежащих углов, образованных при пересечении прямых *a* и *c* секущей *AB*.

Решение задачи на построение обычно включает четыре этапа: анализ, построение, доказательство и исследование. Рассмотрим каждый из них в отдельности.

1. Анализ. На этом этапе осуществляется поиск решения задачи. Его конечная цель — установление последовательности, алгоритма, состоящего из основных или элементарных построений, приводящих к построению искомой фигуры. Как и решение геометрической задачи на вычисление и доказательство, поиск такого алгоритма сопровождается чертежом, иллюстрацией, помогающими установить связи и зависимости между данными и искомыми фигурами.

2. Построение. Этот этап решения представляет собой непосредственную реализацию на чертеже найденного алгоритма с помощью выбранных инструментов построения.

3. Доказательство. Его цель — доказательство того, что построенная на предыдущем этапе фигура действительно искомая, т. е. удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям.

4. Исследование. Этот этап решения состоит в выяснении того, всегда ли задача имеет решение; если не всегда, то при каких конкретных данных и сколько именно решений она имеет. При этом разными считаются решения, дающие неравные фигуры.

Задача. Построить параллелограмм по основанию *a,* высоте *h* и одной из диагоналей *d*.

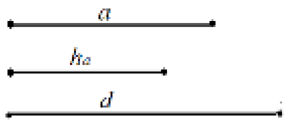


Рис. 51

Согласно условию, данными являются отрезки, представляющие основание, высоту и диагональ параллелограмма (рис. 51). Все эти фигуры считаются уже построенными, и поэтому объяснение не требуется.

1. Анализ. Выполним чертеж-иллюстрацию, считая, что искомый параллелограмм *ABCD* уже построен (рис. 52).

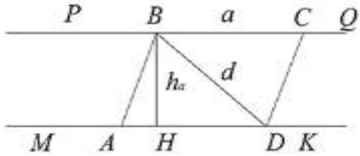


Рис. 52

Отмечаем на чертеже данные элементы: $BC = a$, $BH = h_a$,$MB = d$.

Устанавливаем связи и зависимости между элементами параллелограмма. Отмечаем, что противоположные стороны *AD* и *BC* лежат на параллельных прямых, расстояние между которыми равно высоте h. Поэтому можно построить треугольник *ABD* и затем достроить его до параллелограмма *ABCD*. Получим следующий алгоритм построения искомой фигуры:

1) строим параллельные прямые *МК* и *PQ* на расстоянии h друг от друга;

2) на прямой *МК* откладываем отрезок $AD = a$;

3) из точки *D,* как из центра, радиусом d проводим окружность и находим точку *B,* ее пересечения с прямой *PQ*;

4) на луче *BQ* откладываем отрезок $BC = a$;

5) строим отрезки *AB* и *CD.*

2. Построение. Все этапы алгоритма построения выполняем циркулем и линейкой непосредственно на чертеже с использованием заданных элементов (рис. 53).

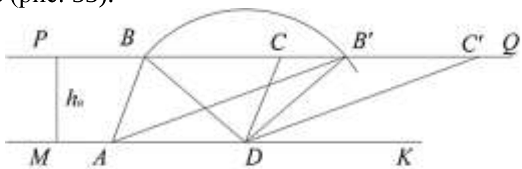


Рис. 53

3. Доказательство. Рассмотрим четырехугольник *ABCD*. Его противоположные стороны *AD* и *BC* параллельны, так как лежат на параллельных прямых *MK* и *PQ*. Эти же стороны равны по построению: *AD* = *BC* = *a*. Значит, *ABCD* — параллелограмм, у которого *AD* = *a*, *BD* = d, а высота равна h_a, так как расстояние между параллельными прямыми *MK* и *PQ* равно h_a, (по построению). Следовательно, *ABCD* — искомый параллелограмм.

4. Исследование. Проверим возможность построения параллелограмма *ABCD* непосредственно по шагам алгоритма построения:

1) параллельные прямые *MK* и *PQ* на расстоянии h_a, всегда можно построить, и притом единственным образом;

2) построить отрезок $AD = a$ на прямой *MK* также всегда можно, и притом единственным образом;

3) окружность, проведенная из центра *D* радиусом d, будет иметь общие точки с прямой *PQ* только тогда, когда $d \geq h_a$. Если $d = h_a$, то получится одна общая точка *B*, если же $d > h_a$, то две общие точки *B* и *B'*;

4, 5) эти построения всегда однозначно выполнимы. Таким образом, решение возможно, если $d \geq h_a$. Если $d = h$, то задача имеет единственное решение, если же $d > h_a$, то два решения.

15. Площадь фигуры, ее основные свойства. Площади основных геометрических фигур

Геометрические величины

Геометрические величины — это свойства геометрических фигур, характеризующих их форму и размеры. К ним относятся: длина, площадь, объем и величина угла. Это скалярные величины, так как они определяются своими численными значениями.

В геометрии прежде всего изучают то число, которое получается в результате измерения величины, т. е. меру величины при выбранной единице величины. Это число называют длиной, площадью, объемом.

Рассмотрим вопросы, связанные с измерением геометрических величин, которые непосредственно связаны с изучением величин в начальной школе.

Длина отрезка и ее измерение

В геометрии длина — это величина, характеризующая протяженность отрезка, а также других линий (ломаной, кривой).

Определение. Длиной отрезка называется положительная величина, обладающая следующими свойствами:

1) равные отрезки имеют равные длины;

2) если отрезок состоит из двух отрезков, то его длина равна сумме длин его частей.

Эти свойства длины отрезка используются при ее измерении. Чтобы измерить длину отрезка, нужно иметь единицу длины. В геометрии такой единицей является длина произвольного отрезка.

Результатом измерения длины отрезка является положительное действительное число — его называют численным значением длины отрезка при выбранной единице длины или мерой длины данного отрезка. Если обозначить длину отрезка буквой X, единицу длины — E, а получаемое при измерении действительное число — буквой a, то можно записать: $a = m_E(\mathrm{X})$ или $X = a\ E$.

Получаемое при измерении длины отрезка положительное действительное число должно удовлетворять ряду требований:

1. Если два отрезка равны, то численные значения их длин тоже равны.

2. Если отрезок x состоит из отрезков x_1 и x_2, то численное значение его длины равно сумме численных значений длин отрезков x_1 и x_2.

3. При замене единицы длины численное значение длины данного отрезка увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.

4. Численное значение длины единичного отрезка равно единице.

Положительное действительное число, являющееся мерой длины заданного отрезка, всегда существует и единственно, для каждого положительного действительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.

Численное значение длины отрезка называют длиной.

Задача. Построить отрезок, длина которого 3,2E. Каким будет численное значение длины этого отрезка, если единицу длины E увеличить в 3 раза?

Решение. Построим произвольный отрезок и будем считать его единичным. Затем построим прямую, отметим на ней точку A и отложим от нее 3 отрезка, длины которых равны E. Получим отрезок AB, длина которого $3E$ (рис. 54). Чтобы получить отрезок длиной 3,2E, надо ввести новую единицу длины. Для этого единичный отрезок надо разбить либо на 10 равных частей, либо на 5, поскольку $0{,}2 = \frac{1}{5}$. Если от точки B отложить отрезок, равный $\frac{1}{5}$ единичного, то длина отрезка AC будет равна 3,2E.

Рис. 54

Чтобы выполнить второе требование задачи, воспользуемся свойством 3, согласно которому при увеличении единицы длины в 3 раза численное значение длины данного отрезка уменьшается в 3 раза. Разделим 3,2 на 3, получим:$3{,}2 \div 3 = 3\,\frac{1}{5} \div 3 = \frac{16}{15} = 1\,\frac{1}{15}$.Таким образом, при единице длины $3E$ численное значение длины построенного отрезка AC будет равно $1\frac{1}{15}$.

Величина угла и ее измерение

Каждый угол имеет величину.

Определение. Величиной угла называется положительная величина, определенная для каждого угла так, что:

1) равные углы имеют равные величины;

2) если угол состоит из двух углов, то его величина равна сумме величин его частей.

Эти свойства лежат в основе измерения величины угла. Единичный угол, а если нужно и его доли, откладываются на угле, величина которого измеряется.

Число, которое получается в результате измерения величины угла, должно удовлетворять ряду требований — они аналогичны требованиям, предъявляемым к числовому значению длины отрезка.

На практике за единицу величины угла принимают градус — $\frac{1}{90}$ часть прямого угла. Один градус записывают так: 1°. Величина прямого угла равна 90°, величина развернутого — 180°.

Градус делится на 60 минут, а минута на 60 секунд. Одну минуту обозначают 1', одну секунду — 1". Если мера величины угла равна 5 градусам 3 минутам и 12 секундам, то пишут 5°3'12".

Вместо «величина угла» говорят «угол». Например, вместо «величина угла равна 35 градусам» говорят, что «угол равен 35 градусам».

На практике величины углов измеряют с помощью транспортира.

Понятие площади фигуры и ее измерение

Задача определения площадей фигур относится к глубокой древности. Она возникла в связи с практической деятельностью людей. Каждый человек представляет, что такое площадь комнаты, площадь участка земли, площадь поверхности, которую надо покрасить. Он также понимает, что если земельные участки одинаковы, то площади их равны; что площадь квартиры складывается из площади комнат и площади других ее помещений.

Это представление о площади используется при ее определении в геометрии, где говорят о площади фигуры. Но геометрические фигуры устроены по-разному, и поэтому, когда говорят о площади, выделяют определенный класс фигур. Например, рассматривают площадь многоугольника, площадь произвольной плоской фигуры, площадь поверхности многогранника и др.

Так же как и при рассмотрении длины отрезка и величины угла, будем использовать понятие «состоять из», определяя его следующим образом: фигура F состоит (составлена) из фигур F_1, и F_2, если она является их объединением, и у них нет общих внутренних точек. В этой же ситуации можно говорить, что фигура F разбита на фигуры F_1 и F_2. Например, о фигуре F, изображенной на рис. 55*а*, можно сказать, что она состоит из фигур F_1, и F_2, поскольку они не имеют общих внутренних точек. Фигуры F_1 и F_2 на рис. 55*б* имеют общие внутренние точки, поэтому нельзя утверждать, что фигура F состоит из фигур F_1 и F_2. Если фигура F состоит из фигур F_1 и F_2, то пишут $F = F_1 \oplus F_2$.

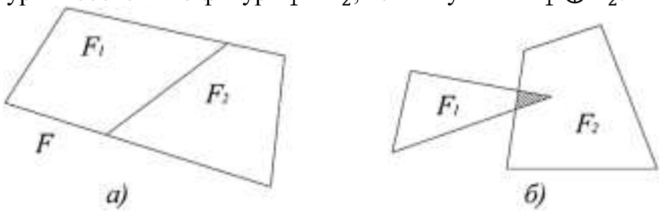


Рис. 55

Определение. Площадью фигуры называется положительная величина, определенная для каждой фигуры так, что:

1) равные фигуры имеют равные площади;

2) если фигура состоит из двух частей, то ее площадь равна сумме площадей этих частей.

Чтобы измерить площадь фигуры, нужно иметь единицу площади. Как правило, такой единицей является площадь квадрата со стороной, равной единичному отрезку. Площадь единичного квадрата обозначим буквой E, а число, которое получается в результате измерения площади фигуры — $S(F)$. Это число называют численным значением площади фигуры F при выбранной единице площади E. Оно должно удовлетворять условиям:

1. Число $S(F)$ — положительное.

2. Если фигуры равны, то равны численные значения их площадей.

3. Если фигура F состоит из фигур F_1 и F_2, то численное значение площади фигуры равно сумме численных значений площадей фигур F_1 и F_2.

4. При замене единицы площади численное значение площади данной фигуры F увеличивается (уменьшается) во столько же раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.

5. Численное значение площади единичного квадрата принимается равным 1, т. е. $S(F) = 1$.

6. Если фигура F_1 является частью фигуры F_2, то численное значение площади фигуры F_1 не больше численного значения площади фигуры F_2 ,т. е. $F_1 \subset F_2 \Longrightarrow S(F_1) \leq S(F_2)$.

В геометрии доказано, что для многоугольников и произвольных плоских фигур такое число всегда существует и единственно для каждой фигуры.

Определение. Фигуры, у которых площади равны, называются равновеликими.

Площадь прямоугольника

Теорема. Площадь прямоугольника равна произведению длин соседних его сторон.

Напомним, что слово «площадь» в этой формулировке означает численное значение площади, а слово «длина» — численное значение длины отрезка.

Доказательство. Если F — данный прямоугольник, а числа a, b — длины его сторон, то $S(F) = ab$. Докажем это.

Пусть a и b — натуральные числа. Тогда прямоугольник F можно разбить на единичные квадраты (рис. 56):

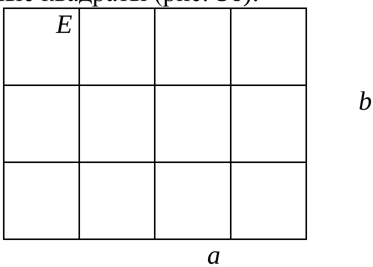


Рис. 56

$F=E\oplus E\oplus E\oplus ...\oplus E$. Всего их ab, так как имеем b рядов, в каждом из которых a квадратов. Отсюда

$$S(F) = S(E) + S(E) + \ldots + S(E) = abS(E) = ab.$$

Пусть теперь a и b — положительные рациональные числа: $a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{q}$, где m, n, p, q — натуральные числа.

Приведем данные дроби к общему знаменателю: $a = \frac{mq}{nq}$, $b = \frac{np}{nq}$.

Разобьем сторону единичного квадрата F на nq равных частей. Если через точки деления провести прямые, параллельные сторонам, то квадрат E разделится на $(nq)^2$ более мелких квадратов. Обозначим площадь каждого такого квадрата E. Тогда $S(E) = (nq)^2 - S(E_1)$, а поскольку $S(E) = 1$, то $S(E_1) = \frac{1}{(nq)^2}$.

Так как $a = \frac{mq}{nq}$, $b = \frac{np}{nq}$, то отрезок длиной $\frac{1}{nq}$ укладывается на стороне a точно mq раз, а на стороне b — точно np раз. Поэтому данный прямоугольник F будет состоять из $mqnp$ квадратов E_1. Следовательно,

$$S(E) = mqnp\, S(E1) = mqnp \frac{1}{(nq)^2} = \frac{mq}{nq}\frac{np}{nq} = \frac{mp}{nq} = ab.$$

Таким образом, доказано, что, если длины сторон прямоугольника выражены положительными рациональными числами a и b, то площадь этого прямоугольника вычисляется по формуле $S(F) = ab$.

Из этой теоремы вытекает *следствие*: площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Теорема. Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, не являющийся прямоугольником (рис. 57).

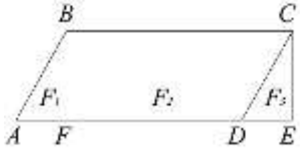


Рис. 57

Опустим перпендикуляр CE из вершины C на прямую AD. Тогда $S(ABCE) = S(ABCD) + S(CDE)$.

Опустим перпендикуляр BF из вершины B на прямую AD, Тогда $S(ABCE) = S(BCEF) + S(ABF)$.

Так как треугольники ABF и CDE равны, то равны и их площади.

Отсюда следует, что $S(ABCD) = S(BCEF)$, т. е. площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $BCEF$ и равна $BCBF$, а так как $BC = AD$, то $S(ABCD) = ADBF$.

Из этой теоремы вытекает *следствие*: площадь треугольника равна половине произведения его стороны на проведенную к ней высоту.

Теорема. Площадь правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

Если периметр правильного многоугольника обозначить буквой p, радиус вписанной окружности — r, а площадь правильного многоугольника — S, то, согласно данной теореме, $S = \frac{1}{2}pr$.

Доказательство. Разобьем правильный n-угольник на n треугольников, соединяя отрезками вершины n-угольника с центром вписанной окружности (рис. 58).

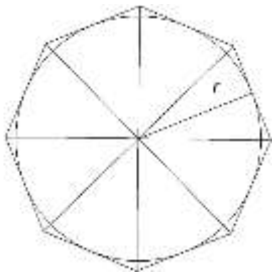


Рис. 58

Эти треугольники равны. Площадь каждого из них равна $\frac{1}{2}a_n r$, где a_n — сторона правильного n-угольника. Тогда площадь многоугольника равна $\frac{1}{2}a_n rn$, но $a_n n = P$.

Следовательно, $S = \frac{1}{2}Pr$.

Если F — произвольный многоугольник, то его площадь находят, разбивая многоугольник на треугольники (или другие фигуры, для которых известны правила вычисления площади).

Кроме равенства и равновеликости фигур в геометрии рассматривают отношение равносоставленности.

Многоугольники F_1 и F_2 называются равносоставленными, если их можно разбить на соответственно равные части.

Например, параллелограмм *ABCD* и прямоугольник *FBCE* равносоставлены (рис. 59),

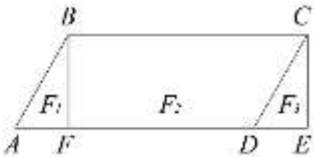


Рис. 59

т. к. параллелограмм состоит из фигур F_1 и F_2, а прямоугольник — из фигур F_2 и F_3, причем $F_1 = F_3$.

Равносоставленные фигуры равновелики.

Теорема. Любые два равновеликих многоугольника равносоставлены. Другими словами, если два многоугольника имеют равные площади, то их всегда можно представить состоящими из попарно равных частей.

Докажем утверждение о том, что всякий треугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником, т. е. всякий треугольник можно перекроить в равновеликий ему прямоугольник.

Пусть дан треугольник *ABC* (рис. 60).

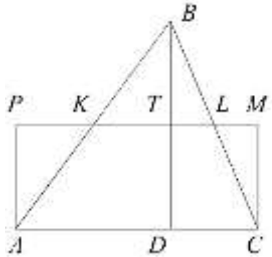


Рис. 60

Проведем в нем высоту *BD* и среднюю линию *KL*. Построим прямоугольник, одной стороной которого является *AC,* а другая лежит на прямой *KL*. Так как пары треугольников *APK* и *KBT,* а также *CLM* и *TBL* равны, то треугольник *ABC* и прямоугольник *APMC* равносоставлены.

Площадь произвольной плоской фигуры и ее измерение

Вычисление площади многоугольника сводится к вычислению площадей треугольников, на которые можно разбить этот многоугольник. А как находить площадь произвольной плоской фигуры? И что представляет собой число, выражающее эту площадь?

Пусть *F* — произвольная плоская фигура. Она имеет площадь *S(F),* если выполняются следующие условия: существуют многоугольные фигуры, которые содержат *F*, существуют многоугольные фигуры, которые содержатся в *F,* площади этих многоугольных фигур как угодно мало отличаются от *S(F).*

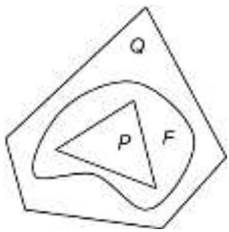


Рис. 61

На рис. 61 показано, что фигура Q содержит фигуру F, т. е. Q — объемлющая фигура, а фигура P содержится в F, т. е. P — входящая фигура. На теоретико-множественном языке это означает, что $P \subset F \subset Q$ и, следовательно, можно записать, что $S(P) \leq S(F) \leq S(Q)$.

Если разность площадей объемлющей и входящей фигур может стать как угодно малой, то существует единственное число $S(F)$, удовлетворяющее неравенству $S(P) \leq S(F) \leq S(Q)$ для любых многоугольных фигур P и Q. Данное число и считают площадью фигуры F.

Этими теоретическими положениями пользуются, например, когда выводят формулу площади круга. Для этого в круг F радиуса r вписывают правильный n-угольник P, а около окружности описывают правильный n-угольник Q. Если обозначить символами $S(Q)$ и $S(P)$ площади этих многоугольников, то будем иметь, что $S(P) \leq S(F) \leq S(Q)$, причем при возрастании числа сторон вписанных и описанных многоугольников площади $S(P)$ будут увеличиваться, оставаясь при этом меньше площади круга, а площади $S(Q)$ будут уменьшаться, но оставаться больше площади круга.

Площадь правильного n-угольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной в него окружности. При возрастании числа его сторон периметр стремится к длине окружности $2\pi r$, а площадь — к площади круга. Поэтому $S_{\text{кр}} = \frac{1}{2} 2\pi r^2 = \pi r^2$.

Для приближенного измерения площадей плоских фигур можно использовать различные приборы, в частности, палетку.

Палетка — это прозрачная пластина, на которой нанесена сеть квадратов. Сторона квадрата принимается за 1, и чем меньше эта сторона, тем точнее можно измерить площадь фигуры.

Накладываем палетку на данную фигуру F. Квадраты, которые целиком лежат внутри фигуры F, образуют многоугольную фигуру P; квадраты, имеющие с фигурой F общие точки и целиком лежащие внутри фигуры F, образуют многоугольную фигуру Q (рис. 62). Площади $S(P)$ и $S(Q)$ находят простым подсчетом квадратов. За приближенное значение площади фигуры F принимается среднее арифметическое найденных площадей:

$$S(F) = \frac{S(Q)+S(P)}{2}.$$

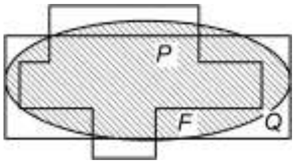


Рис. 62

В начальном курсе математики учащиеся измеряют площади фигур с помощью палетки таким образом: подсчитывают число квадратов, которые лежат внутри фигуры F, и число квадратов, через которые проходит контур фигуры; затем второе число делят пополам и прибавляют к первому. Полученную сумму считают площадью фигуры F.

Дадим обоснование этим действиям. Пусть m — число квадратов, которые поместились внутри фигуры F, а n — число квадратов, через которые проходит контур фигуры F. Тогда $S(P) = m,$ а $S(Q) = m + n.$

И значит, $S(F) = \frac{m+(m+n)}{n} = \frac{2m+n}{2} = m + \frac{n}{2}.$

Палетка позволяет измерить площадь фигуры F с определенной точностью. Чтобы получить более точный результат, нужно взять палетку с более мелкими квадратами или наложить одну и ту же палетку на фигуру по-разному и найти несколько приближенных значений площади фигуры F. Их среднее арифметическое является приближением к численному значению площади фигуры F.

Список рекомендованной литературы

1. Аматова, Г. М. Математика : в 2 кн. Кн. 1 : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Г. М. Аматова, М. А. Аматов. — М. : Изд. центр «Академия», 2008. — 256 с.
2. Аматова, Г. М. Математика : в 2 кн. Кн. 2 : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Г. М. Аматова, М. А. Аматов. — М. : Изд. центр «Академия», 2008. — 240 с.
3. Атанасян, Л. С. Геометрия, 10—11 : учебник для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф, Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. — 12-е изд. — М. : Просвещение, 2003. — 206 с.
4. Атанасян, Л. С. Геометрия 7—9 / Л. С. Атанасян. — М. : Просвещение, 1992. — 384 с.
5. Задачник-практикум по математике / под ред. Н. Я. Виленкина. — М. : Просвещение, 1977. — 208 с.
1. Математическая библиотека [Электронный ресурс]. — URL: www.math.ru/lib.
6. Образовательный математический сайт [Электронный ресурс]. — URL: http://www.exponenta.ru
7. Погорелов, А. В. Геометрия 7—11 / А. В. Погорелов. — М. : Просвещение, 1993. — 384 с.
8. Стойлова, Л. П. Математика : учеб. для студентов высш. пед. учеб. заведений / Л. П. Стойлова. — М. : Изд. центр «Академия», 2002. — 424 с.
9. Стойлова, Л. П. Задачник-практикум по математике / Л. П. Стойлова, Н. Н. Лаврова. — М. : Просвещение, 1985. — 184 с.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебно-методическое издание

Составители:

Бурлак Наталья Владимировна,
Кертанова Валерия Викторовна,
Савилова Ольга Владимировна,
Христофорова Алевтина Владимировна.

Государственный экзамен по математике

Учебно-методическое пособие
для студентов, обучающихся по специальности
«Педагогика и методика начального образования»

Подписано в печать 22.12.14. Формат 60×84/16.
Уч.-изд. л. 5,28. Усл.-печ. л. 6,3.
Тираж 100 экз. Заказ №

ИП «Николаев»,
г. Балашов, Саратовская обл., а/я 55.

Отпечатано с оригинал-макета,
изготовленного редакционно-издательским отделом
Балашовского института Саратовского университета.
412309, г. Балашов, Саратовская обл., ул. К. Маркса, 29.

Печатное агентство «Арья»,
ИП «Николаев», Лиц. ПЛД № 68-52.
412309, г. Балашов, Саратовская обл.,
ул. К. Маркса, 43.
E-mail: arya@balashov.san.ru2

Государственный экзамен
по математике